М.В. Губко, Д.А. Новиков

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Настоящий материал содержит описание основных понятий и моделей теории игр. В том числе кратко рассматриваются: некооперативные игры, кооперативные игры и иерархические игры. Для более полного ознакомления с проблематикой и результатами использования теоретико-игровых моделей в задачах управления организационными системами можно порекомендовать учебники и монографии [6, 9, 11, 14-16].

Некооперативные игры

Рассмотрим *игровую неопределенность*, отражающую совместное принятие решений несколькими агентами (при заданных управлениях со стороны центра), в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений *обстановки игры* (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов их поведения).

Для описания коллективного поведения агентов недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора по отдельности. В случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. В случае, когда агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов. Если в силу гипотезы рационального поведения каждый из агентов стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких агентов индивидуально рациональное действие каждого из них зависит от действий других агентов.

Рассмотрим теоретико-игровую модель *некооперативного взаимодействия* между n агентами, предполагая, что они принимают решения одновременно и независимо, не имея возможности договариваться о выбираемых действиях, перераспределять получаемую полезность (выигрыш) и т.д.

Каждый агент осуществляет выбор *действия* x_i, принадлежащего *допустимому множеству* X_i, i Î $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется однократно, одновременно и независимо.

Выигрыш i-го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от вектора действий

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ Î } X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$$

оппонентов $N \setminus \{i\}$ и от *состояния природы*[1] q Î W, и описывается действительнозначной *функцией выигрыша* $f_i = f_i(q, x)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Î $X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор действий всех агентов. При фиксированном значении состояния природы совокупность $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \text{ Î } N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \text{ Î } N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых функций называется *игрой в нормальной форме*. *Решением игры* (*равновесием*) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов [6].

В силу гипотезы рационального поведения каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения его целевой функции) действия при заданной обстановке. *Обстановкой* для него будет совокупность состояния природы q Î W и обстановки игры

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ Î } X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j .$$

Следовательно, принцип принятия им решения о выбираемом действии (при фиксированных обстановке и состоянии природы) можно записать следующим образом (BR обозначает *наилучший ответ* – best response):

---

[1] *Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают индивидуальные характеристики (типы) агентов.*

$$BR_i(q, x_{-i}) = \mathrm{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(q, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$$

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры.

Равновесие в доминантных стратегиях. Если для некоторого агента при любом состоянии природы множество его наилучших ответов не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий (совокупность доминантных стратегий агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС) [6]. Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то они могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких предположений об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Для реализации агентами РДС, если последнее существует, достаточно знания каждым из них только своей целевой функции и допустимых множеств X' и W.

Гарантирующее равновесие. Той же информированностью должны обладать агенты для реализации *гарантирующего* (*максиминного*) *равновесия*, которое существует почти во всех играх:

$$x_i^{г} \in \mathrm{Arg} \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{q \in \Omega} f_i(q, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$$

Равновесие Нэша. Определим многозначное отображение

$$BR(q, x) = (BR_1(q, x_{-1}); BR_2(q, x_{-2}), \ldots, BR_n(q, x_{-n})).$$

Равновесием Нэша [6] при состоянии природы q (точнее – *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(q) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию:

$$x^*(q) \in BR(q, x^*(q)).$$

Последнее вложение можно также записать в виде:

$$\forall\ i \in N,\ \forall\ y_i \in X_i \quad f_i(q, x^*(q)) \geq f_i(q, y_i, x^*_{-i}(q)).$$

Множество $E_N(q)$ всех точек вида $x^*(q)$ можно описать следующим образом:

$$E_N(q) = \{x \in X' \mid x_i \in BR_i(q, x_{-i}),\ i \in N\}.$$

Для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы рациональность агентов и все параметры игры, а также значение состояния природы были *общим знанием* [13], то есть каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также знает значение состояния природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает и т.д. до бесконечности.

Субъективное равновесие. Рассмотренные виды равновесия являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку игры, которая может реализоваться с его субъективной точки зрения. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что *i*-ый агент рассчитывает на реализацию обстановки игры $\hat{x}_{-i}^B$ ("B" обозначает beliefs; иногда используются термины «предположение», «догадка» – conjecture) и состояния природы $\hat{\theta}_i$, тогда он выберет

$$x_i^B \in BR_i(\hat{\theta}_i,\ \hat{x}_{-i}^B),\ i \in N.$$

Вектор x^B является *точечным субъективным равновесием*.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть, может оказаться, что $\exists\ i \in N$: $\hat{x}_{-i}^B \neq x_{-i}^B$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\hat{x}_{-i}^B = x_{-i}^B$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием, и чтобы каждый агент при построении $\hat{x}_{-i}^B$ моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае, если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, то субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае *i*-ый агент может рассчитывать на выбор оппонентами действий из множества $X_{-i}^B \subseteq X_{-i}$ и реализацию состояния природы из множества $\hat{\Omega}_i \subseteq \Omega$, $i \in N$. Тогда наилучшим ответом будет *гарантирующее субъективное равновесие*:

$$x_i(X_{-i}^B,\ \hat{\Omega}_i) \in \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i}\ \min_{x_{-i} \in X_{-i}^B}\ \min_{\theta \in \hat{\Omega}_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}),\ i \in N.$$

Если $X_{-i}^{B} = X_{-i}$, $\Omega_i = W$, $i\ \hat{I}\ N$, то $x_i(X_{-i}^{B}) = x_i^{г}$, $i\ \hat{I}\ N$, то есть гарантирующее субъективное равновесие является «классическим» гарантирующим равновесием. Разновидностью гарантирующего субъективного равновесия является П-равновесие, подробно описанное в [1].

В еще более общем случае в качестве наилучшего ответа i-го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot)\ \hat{I}\ D(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на X_i, которое максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $m_i(x_{-i})\ \hat{I}\ D(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении вероятностей $q_i(q)\ \hat{I}\ D(W)$ состояния природы (получим *Байесов принцип принятия решений*) [16]:

$p_i(m_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot)\ \hat{I}$

$$= \operatorname{Arg} \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int_{X',\Omega} f_i(q, x_i, x_{-i})\, p_i(x_i)\, q_i(q)\, m_i(x_{-i})\, dq\ dx,\ i\ \hat{I}\ N.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов – каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества W и X'. Однако при такой информированности совокупность предположений агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность Баейсовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса–Нэша.

<u>Равновесие Байеса–Нэша.</u> Если в игре имеется неполная информация (см. [15, 16]), то Байесова игра описывается следующим набором:

- множеством N агентов;

- множеством K' возможных *типов* агентов, где тип i-го агента $k_i\ \hat{I}\ K_i$, $i\ \hat{I}\ N$, вектор типов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)\ \hat{I}\ K' = \prod_{i \in N} K_i$;

- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;

- набором функций полезности u_i: K' ´ X' ® $\hat{A}^1$;

- представлениями $m_i(\cdot|k_i)$ Î $D(K_{-i})$, i Î N, агентов.

Равновесие Байеса-Нэша в игре с неполной информацией определяется как набор стратегий агентов вида s_i: K_i ® X_i, i Î N, которые максимизируют соответствующие ожидаемые полезности

$$U_i(k_i,\ s_i(\cdot),\ s_{-i}(\cdot)) = \int_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i(k,\ s_i(k_i),\ s_{-i}(k_{-i}))\, m_i(k_{-i}|\ k_i)\, dk_{-i},\ i \text{ Î } N.$$

В Байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{m_i(\cdot|\cdot)\}_{i \text{ Î } N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $m(k)$ Î $D(K')$, которое является общим знанием.

Выше рассмотрены некоторые концепции решения некооперативных игр. Приведем основные понятия кооперативных игр, моделирующих взаимодействие агентов, которые имеют возможность образовывать коалиции, и в рамках этих коалиций договариваться о выбираемых действиях, перераспределять полезность и т.д. (отметим, что в настоящей работе рассматриваются, в основном, некооперативные модели – результаты исследования кооперативного взаимодействия участников организационных систем описаны в [5, 6, 14]).

П.1.2. Кооперативные игры

Кооперативная игра задается множеством игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ и характеристической функцией v: $2^N \to R$, ставящей в соответствие каждой коалиции игроков $S \subseteq N$ ее выигрыш.

Дележом игры (N, v) называется вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (*свойство эффективности*), $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$ (*свойство индивидуальной рациональности*).

Решением кооперативной игры обычно считается множество дележей, которые реализуемы при рациональном поведении игроков. Различные концепции решения кооперативных игр отличаются предположениями о рациональном поведении игроков.

Говорят, что дележ x доминирует дележ y по коалиции S ($x \succ_S y$), если $\forall i \in S \quad x_i > y_i$, $\sum_{i \in S} x_i \le v(S)$. Если существует такая коалиция S, что $x \succ_S y$, говорят, что дележ x доминирует дележ y. Множество недоминируемых дележей игры называется ее C-ядром.

Для заданного множества игроков N *сбалансированным покрытием* называется такое отображение d_S множества собственных коалиций $2^N \backslash \{N\}$ в отрезок [0, 1], что $\sum_{S:\, i \in S} d_S = 1$ для всех игроков $i \in N$ (суммирование ведется по собственным коалициям, содержащим игрока i).

Необходимые и достаточные условия непустоты C-ядра даются *теоремой О.Н. Бондаревой*: C-ядро игры (N, v) не пусто тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного покрытия d_S

$$\sum_{S \subset N} d_S v(S) \le v(N).$$

Игры с непустым C-ядром называются *сбалансированными*.

Кооперативная игра называется *несущественной*, если для произвольной коалиции $S \subseteq N \quad v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$, в противном случае игра называется *существенной*. Несущественность игры означает нулевой эффект от кооперации игроков.

Игровая ситуация является *сильным равновесием Нэша*, если никакая коалиция не может выиграть, отклоняясь от равновесной ситуации. Множество сильных равновесий Нэша может оказаться пустым, однако если в некоторой игре с трансферабельной полезностью игроков имеется единственное сильное равновесие Нэша, то соответствующая кооперативная игра будет несущественной.

Концепция *решений в угрозах и контругрозах* основана на следующей идее. Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $T = \{1, 2\}$, в которую входят игроки с номерами 1 и 2. При распределении дохода коалиции $v(\{1, 2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы x_1 и x_2 соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, он может сказать своему партнеру, что, если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $S = \{1, 3\}$, где сможет рассчитывать на б**о**льший выигрыш. Если такая коалиция S может образоваться, то есть если игроку 3 выгодно сменить конфигурацию x на новую конфигурацию y, то такое заявление называется угрозой игрока 1 игроку 2. В свою очередь, игрок 2 может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию z коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, что игрок 3 получит б**о**льший доход, чем в конфигурации y, а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной конфигурации x. Таким образом, игрок 2 выдвигает контругрозу, «защищающую» его долю x_2.

Тогда распределение выигрыша коалиций некоторой коалиционной структуры между своими участниками является равновесием в угрозах и контругрозах, если на каждую угрозу произвольной коалиции K против любой другой коалиции L найдется контругроза коалиции L против коалиции K.

П.1.3. Иерархические игры

Если в рассматриваемых до сих пор моделях игровой неопределенности предполагалось, что игроки (агенты) выбирают свои стратегии одновременно и однократно (модели повторяющихся и дифференциальных игр в настоящей работе не рассматриваются – см. [5, 9, 12]), то в *иерархических играх* [2, 3, 4, 7, 8] существует фиксированный порядок ходов – первый ход делает центр, затем свои стратегии выбирают агенты. С этой точки зрения иерархические игры являются наиболее адекватным аппаратом описания задач управления организационными системами.

Для иерархических игр характерно использование максимального гарантированного результата (МГР) в качестве базовой концепции решения игры. При этом «пессимистичность» МГР (взятие минимума по множеству неопределенных параметров) компенсируется возможностью передачи информации между игроками, что, очевидно, снижает неопределенность при принятии решения.

Критерии эффективности (целевые функции) первого и второго игроков обозначим $w_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ соответственно. Выигрыши игроков зависят от их действий x_1 и x_2 из множеств действий X_1^0, X_2^0.

Во всех моделях иерархических игр считается, что *первый игрок* (*центр*) имеет право первого хода. Его ход состоит в выборе *стратегии* $\tilde{x}_1$. Понятие стратегии существенно отличается от понятия действия и тесно связано с информированностью первого игрока о поведении *второго игрока – агента*. Под стратегией игрока здесь и далее понимается правило его поведения, то есть правило выбора конкретного действия в зависимости от содержания и конкретного значения той информации, которую он получит в процессе игры. Выбирать же собственно действие центр может и после выбора действия агентом.

Самая простая стратегия центра состоит в выборе непосредственно действия x_1 (если поступления дополнительной информации о действии агента в процессе игры не ожидается), более сложная – в выборе функции $\tilde{x}_1(x_2)$ (если в процессе игры ожидается информация о действии агента). Также стратегия центра может состоять в сообщении агенту некоторой информации, например, информации о планах своего поведения в зависимости от выбора агентом действия. При этом агент должен быть уверен, что первый игрок может реализовать эту стратегию, то есть что первый игрок будет точно знать реализацию действия x_2 на момент выбора своего действия x_1.

Например, если агент (выбирающий стратегию вторым) не ожидает информации о <u>действии</u> центра, то реализация права первого хода центра может состоять в сообщении центром агенту функции $\tilde{x}_1(x_2)$. Такое сообщение может рассматриваться, как обещание выбрать действие $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при выборе агентом действия x_2. Тогда стратегия агента состоит в выборе действия в зависимости от сообщения центра, $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(\cdot))$. Если при этом агент доверяет сообщению центра, он должен выбрать действие x_2^*, реализующее

$$\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2).$$

Игра с описанным выше порядком функционирования называется для краткости игрой Γ_2 (примером такой игры служит, как раз, задача стимулирования в условиях информированности центра о действии агента – см. [10]) [2].

Если центр не ожидает информации о действии агента, и это известно агенту, то стратегия центра состоит, как уже было сказано, просто из выбора некоторого действия x_1^*. Стратегия агента состоит в выборе $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (он делает ход вторым, уже зная действие центра). Такая игра называется игрой $Г_1$ (это, например, та же задача стимулирования, но уже в условиях отсутствия у центра информации о действии агента) [2].

Рассмотрим сначала игру $Г_1$. Пара действий (x_1^*, x_2^*) в игре $Г_1$ называется *равновесием Штакельберга,* если

(1) $x_1^* \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_1 \in X_1^0,\, x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2)$,

(2) $x_2^* \in R_2(x_1^*) = \operatorname*{Arg\,max}_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2)$,

то есть $R_2(x_1)$ – функция наилучшего ответа агента на действие центра.

Равновесие в игре $Г_1$ отличается от равновесия Штакельберга (1) тем, что при определении оптимальной стратегии первого игрока вычисляется минимум по множеству $R_2(x_1)$:

$$x_1^* \in \operatorname*{Arg\,max}_{x_1 \in X_1^0} \min_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

В игре $Г_1$ агент выбирает действие в условиях полной информированности, уже зная действие центра. Максимизация выигрыша выбором своего действия является здесь частным случаем применения принципа МГР. Равновесное по Штакельбергу действие центра также дает ему гарантированный результат, если центр уверен в том, что агент выбирает свое действие в соответствии с (2) и принципом благожелательности. Таким образом, равновесные стратегии как центра, так и агента, являются для них и гарантирующими.

Однако ситуация, когда первый ход дает преимущество, все же более типична. Тогда, если порядок ходов определяется самими игроками, между ними возникает борьба за лидерство. Игре двух лиц в нормальной форме можно поставить в соответствие две игры

Γ_1 (игры первого порядка), отличающиеся последовательностью ходов. Тогда борьба за лидерство (первый ход) определяется выгодностью перехода от исходной игры к какой-либо из иерархических игр первого порядка. Известно [6], что, если в игре двух лиц имеются хотя бы два различных оптимальных по Парето равновесия Нэша, то в этой игре имеет место борьба за первый ход.

Тем не менее, во многих случаях соответствующее игре Γ_1 поведение центра нельзя назвать эффективным (см. раздел 2.1 – если в задаче стимулирования центр будет первым выбирать действие (стимулирование агента, уровень зарплаты), а затем уже агент будет выбирать свое действие при заданном стимулировании, единственное равновесие Штакельберга будет состоять в том, что центр ничего не будет платить агенту, а агент, соответственно, не будет работать). Поэтому, когда центр наблюдает действие агента, он заинтересован сообщить агенту о своих планах по выбору действия в зависимости от действия агента, реализуя тем самым игру Γ_2.

Далее приводится формулировка теоремы о максимальном гарантированном результате центра в игре типа Γ_2. К этой игре сводятся многие модели управления, например, задача стимулирования в условиях полной информированности (см. вторую и третью главы). Определим необходимые для формулировки теоремы понятия.

Целевые функции игроков: $w_1 = f_1(x_1, x_2)$, $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ непрерывны на компактных множествах $x_1 \in X_1^0$ $x_2 \in X_2^0$ допустимых действий.

Стратегия центра – $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_2)$, то есть предполагается следующий порядок функционирования: игрок 1, обладая правом первого хода, сообщает игроку 2 план выбора своей стратегии в зависимости от выбранной игроком 2 стратегии x_2. После этого второй игрок выбирает действие x_2, максимизируя свою целевую функцию с подставленной туда стратегией первого игрока, а затем первый игрок – действие $\tilde{x}_1(x_2)$.

Стратегия наказания $x_1^н = x_1^н(x_2)$ определяется из условия

$$f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Если стратегий наказания несколько, то будем называть *оп-*

тимальной стратегией наказания ту из них, на которой достигается максимум выигрыша первого игрока.

Гарантированный результат второго игрока (при использовании первым игроком стратегии наказания) равен

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множество действий второго игрока, обеспечивающих ему максимальный выигрыш при использовании первым игроком стратегии наказания: $E_2 = \{x_2 \mid f_2(x_1^н(x_2), x_2) = L_2\}$.

Множество достижимости $D = \{(x_1, x_2): f_2(x_1, x_2) > L_2\}$ – это договорное множество рассматриваемой игры, то есть множество сочетаний стратегий первого и второго игроков, которые гарантировали бы второму результат, строго больший того, что тот может получить даже при наихудших для него действиях первого игрока (то есть при использовании первым игроком стратегии наказания).

Наилучший результат первого игрока на множестве достижимости $K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2)\in D} f_1(x_1, x_2), D \neq \varnothing \\ -\infty \qquad , D = \varnothing \end{cases}$. Принадлежность ситуации множеству достижимости гарантирует реализуемость этого результата путем использования стратегии наказания.

Действие первого игрока, реализующее $K - e$ при выборе вторым игроком рекомендуемого действия из D:

$$f_1(x_1^e, x_2^e) \geq K - e \ , \ (x_1^e, x_2^e) \in D \neq \varnothing \, .$$

$M = \inf\limits_{x_2 \in E_2} \sup\limits_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2)$ – гарантированный результат центра при применении им стратегии наказания (так как стратегии второго игрока ограничены множеством E_2).

Стратегия $x_1^{ae}(x_2)$ реализует (с точностью e) наилучший ответ центра на действие x_2 агента (e-доминантная стратегия), то есть

$$f_1(x_1^{ae}(x_2)) \geq \sup_{x_1 \in X_1^0} f_1(x_1, x_2) - e \, .$$

Теорема Ю.Б. Гермейера [2]. В указанных условиях наибольший гарантированный результат центра равен $\max[K, M]$. При $K > M$ ε-оптимальная стратегия центра

$\tilde{x}_1^e(x_2)=\begin{cases} x_1^e, & \text{при}\, x_2=x_2^e \\ x_1^н(x_2), & \text{при}\, x_2\neq x_2^e \end{cases}$. При $K \leq M$ оптимальная стратегия центра заключается в применении оптимальной стратегии наказания.

Каким же образом соотносятся выигрыши центра в играх Γ_1 и Γ_2 с одинаковыми функциями выигрыша? Существуют ли более рациональные для центра методы обмена информацией, дающие ему больший выигрыш? Ответ на эти вопросы дает рассмотрение *информационных расширений* игры, или *метаигр*.

Если центр не планирует самостоятельно получить информацию о действии агента, он может первым выбрать действие, реализуя игру Γ_1. Однако ему можно порекомендовать и более сложное поведение. Центр может попросить агента сообщить ему свою стратегию $x_2=\tilde{x}_2(x_1)$, которая основана на ожидаемой агентом информации о действии центра. Реализация права первого хода центром состоит в этом случае в сообщении агенту стратегии $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$. Эту стратегию можно интерпретировать, как обещание центра выбрать действие $\tilde{\tilde{x}}_1(\tilde{x}_2(x_1))$ при условии, что агент обещает выбирать свое действие в соответствии с $\tilde{x}_2(x_1)$. Так образуется игра Γ_3.

Если центр определяет порядок обмена информацией, он может выбирать, играть ему Γ_1 или Γ_3. В обеих играх центр вынужден выбирать действие, не зная действия, выбранного агентом. Можно считать Γ_3, в некотором роде, усложнением игры Γ_1.

Аналогично тому, как, с помощью образования дополнительной «петли обратной связи», из Γ_1 была образована Γ_3, можно усложнить и игру Γ_2. Так образуется игра Γ_4. В ней агент, ожидая от центра, как и в Γ_2, информацию вида $\tilde{x}_1(x_2)$, формирует и сообщает центру свою стратегию $\tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1)$. Центр, обладающий правом первого хода, пользуется стратегиями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1(\tilde{\tilde{x}}_2)$, которые определяют, какую функцию $\tilde{x}_1(x_2)$ выберет центр в зависимости от сообщения агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можно на основе $Г_3$ построить игру $Г_5$, и так далее. В каждой из построенных четных игр $Г_{2m}$, $m = 1, 2, \ldots$, центр использует в качестве стратегий отображения множества стратегий агента в этой игре на множество стратегий центра в игре $Г_{2m-2}$. Аналогично, стратегиями агента являются отображения множества стратегий центра в $Г_{2m}$ на множество стратегий агента в игре $Г_{2m-2}$.

Такую рефлексию можно было бы наращивать бесконечно, переходя к все более сложным схемам обмена информацией, если бы рассмотрение этих игр увеличивало выигрыш центра (в интересах которого и проводится исследование всех метаигр). Однако имеет место следующий результат.

Теорема Н.С. Кукушкина [2]. Максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_{2m}$ при $m > 1$ равен максимальному гарантированному результату центра в игре $Г_2$. В играх же $Г_{2m+1}$ при $m > 1$ максимальный гарантированный результат центра равен его максимальному гарантированному результату в игре $Г_3$.

Таким образом, при исследовании гарантированного результата центра можно ограничиться исследованием только игр $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$. Кроме того, известно [2], что максимальный гарантированный результат центра в игре $Г_2$ не меньше его гарантированного результата в игре $Г_3$, а тот, в свою очередь, не меньше гарантированного выигрыша в игре $Г_1$. Этот результат показывает, что $Г_2$ является «идеальной» игрой для центра. Соответственно, если центр имеет возможность определять порядок и содержание обмена информацией, и, кроме того, при выборе своего действия знает действие, выбранное агентом, он должен играть $Г_2$. Если центр на момент выбора своего действия не знает действия агента – ему наиболее выгодна игра $Г_3$.

Литература

1 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. – 384 с.

2 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.

3 Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.

4 Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.

5 Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.

6 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

7 Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.

8 Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.

9 Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

10 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003. – 312 с.

11 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999. – 108 с.

12 Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.

13 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003. – 160 с.

14 Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

15 Mas-Collel A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995. – 981 p.

16 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.