РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Новиков, А.В. Цветков

МЕХАНИЗМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ

Москва - 2001

УДК 007
ББК 32.81
Н 73

Новиков Д.А., Цветков А.В. **Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем**. М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.

Настоящая работа содержит результаты исследований теоретико-игровых моделей управления организационными системами с распределенным контролем, включающими линейные, матричные и сетевые структуры управления. Значительное внимание уделяется изучению практически важных частных случаев взаимодействия участников системы - задачам стимулирования и др.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению организационными системами.

Рецензент: д.т.н. А.В. Щепкин

Утверждено к печати Редакционным советом Института

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Функционирование *организационных систем* (ОС), характеризуемых целенаправленным поведением участников, действующих в рамках определенной системы правил и процедур[1], является объектом исследований экономики, психологии, социологии, теории управления и других отраслей науки. В зависимости от рассматриваемого аспекта, то есть для различных предметов исследований, используются различные методы исследований. Одним из распространенных методов синтеза оптимальных управлений является математическое моделирование, позволяющее в условиях отсутствия возможности проведения натурного эксперимента проанализировать возможные реакции управляемой системы на те или иные управляющие воздействия, и выбрать такие допустимые управления, которые приводят к желаемому поведению системы.

Формальные модели механизмов функционирования организационных систем исследуются в таких разделах теории управления социально-экономическими системами как теория активных систем (ТАС) [6, 11, 13, 22-26, 57, 61], теория иерархических игр [30-34, 45], теория контрактов [83-87] и др. В рамках всех этих научных направлений принимается следующее теоретико-игровое описание ОС. *Участники* ОС – игроки – подразделяются на управляющие органы (*центры*) и управляемые субъекты (*агенты*), причем в многоуровневой системе один и тот же участник может одновременно являться и агентом, то есть подчиняться участникам, принадлежащим более высокому уровню иерархии, и центром (с точки зрения управляемых им участников более низких уровней иерархии).

---

[1] *Напомним, что группой называется объединение субъектов, совместно осуществляющих свою деятельность; коллективом называется группа, члены которой объединены общностью интересов; организацией (организационной системой) называется коллектив, функционирующий в рамках определенных заданных извне условий, правил и процедур взаимодействия, называемых <u>механизмом функционирования</u>. Таким образом, системообразующим фактором для группы является совместная деятельность, для коллектива - совместная деятельность и общность интересов, для организации - совместная деятельность, общность интересов и механизм функционирования.*

Активность (способность к целенаправленному поведению) участников описывается их возможностью самостоятельного принятия решений – выбора стратегий, влияющих на состояния (результаты деятельности, выигрыши и т.д.) всех участников. Предпочтения участников на множестве их состояний, как правило, описываются целевыми функциями, ставящими в соответствие стратегиям участников[1] их выигрыши. Рациональность поведения участников – стремление к максимизации своей целевой функции – отражается, в зависимости от их *информированности* (той информации, которой они обладают на момент принятия решений о выбираемой стратегии[2]) и *порядка функционирования* ОС (последовательности получения информации и выбора стратегий), в используемой концепции равновесия: в большинстве случаев считается, что, действуя некооперативно (в настоящей работе рассматриваются только некооперативные модели), то есть, выбирая свои стратегии одновременно и независимо, игроки должны оказаться в точке Нэша (или Байеса - в зависимости от принятого описания и введенных предположений) [26, 27, 31, 61, 65, 67, 86].

Рассмотрим взаимодействие между одним агентом и одним центром, находящимся на следующем (более высоком относительно агента) уровне иерархии. Простейшая[3] ОС S, включающая этих

---

[1] *Целевые функции могут зависеть не только от стратегий участников ОС, но и от неопределенных или неконтролируемых ими факторов. Модели ОС, функционирующих в условиях неопределенности, описаны в [62]. В настоящей работе рассматриваются детерминированные модели, в рамках которых участники ОС принимают решения в условиях полной информированности о всех существенных внешних и внутренних параметрах.*

[2] *Относительно понятия "стратегия" следует сделать следующее терминологическое замечание. В узком смысле стратегия - предмет и результат выбора игрока, в широком смысле - правило, по которому игрок осуществляет свой выбор (то есть отображение его информированности во множество допустимых выборов). В настоящей работе мы будем по умолчанию использовать понятие стратегии в первом (узком) его смысле.*

[3] *Детерминированная организационная система, состоящая из одного агента и одного центра, производящих однократно выбор своих стратегий, действительно является "точкой отсчета", то есть базовой моделью как в теории активных систем, так и в теории иерархических игр и в*

двух участников, описывается совокупностью множеств допустимых стратегий центра и агента (U и A соответственно) и их целевыми функциями ($F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ соответственно), то есть $S = \{U, A, F(\cdot), f(\cdot)\}$ (см. конкретизацию информированности и порядка функционирования ниже).

Целевые функции (предпочтения) участников в общем случае являются векторными, то есть $F: U \times A \to \Re^{n_Ф}$, $f: U \times A \to \Re^{n_f}$, где $n_F \geq 1$ и $n_f \geq 1$ - соответствующие размерности. В целях удобства записи скалярные предпочтения ($n_F = 1$, $n_f = 1$) будем иногда обозначать F и f, а векторные ($n_F \geq 2$, $n_f \geq 2$) – соответственно $\vec{Ф}$ и $\vec{f}$.

Множества допустимых стратегий также могут быть многомерными, то есть $A \subseteq \Re^{n_A}$, $n_A \geq 1$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n_u})$, $n_u \geq 1$. Векторное управление[1] ($n_u \geq 2$) будем обозначать $\vec{u}$, скалярное ($n_u = 1$) управление – u.

Сделав маленькое отступление, отметим, что двухуровневыми расширениями описываемой базовой модели являются многоэлементные ОС, в которых имеется более одного агента: $n > 1$ (здесь и далее n обозначает число агентов), и двухуровневые ОС с несколькими центрами[2]: $k > 1$ (здесь и далее k обозначает число центров).

теории контрактов, и обычно изучение более сложных классов моделей начинается с обсуждения их отличий от базовой. Расширениями базовой модели являются многоэлементные [63], многоуровневые [59], динамические и др. ОС, не рассматриваемые подробно в настоящей работе.

[1] *В большинстве рассматриваемых в настоящей работе теоретико-игровых моделей управление является функцией от стратегии управляемого субъекта. В этом случае под скалярным управлением понимается функция, принимающая значения из* $\Re^1$, *а под векторным управлением - вектор-функция.*

[2] *Несколько забегая вперед, отметим, что критерием отнесения субъекта к множеству центров или множеству агентов, является информированность, порядок функционирования и ограничения на допустимые множества - центр является метаигроком, наделенным правом первого хода и, следовательно, имеющим право выбирать свою стратегию в виде функции от стратегии агента, делающего свой ход вторым (см. также общее описание и классификацию иерархических игр в [31, 34, 45]).*

В работах [72, 73] было предложено называть ОС, в которых каждый агент подчинен одному и только одному центру, *ОС с унитарным контролем*, а ОС, в которых хотя бы один агент подчинен одновременно двум центрам – *ОС с распределенным контролем* (ОС РК).

В более общем случае в класс ОС РК можно условно включить ОС с векторными предпочтениями участников, ОС с многомерными множествами допустимых стратегий и т.д. Именно ОС РК в этом (расширенном) смысле и являются предметом исследования в настоящей работе.

Частным случаем ОС РК являются *ОС с межуровневым взаимодействием*, в которых агент подчинен одновременно двум центрам, находящимся на разных уровнях иерархии [59]. Обобщением ОС РК являются *сетевые структуры управления*, в которых отсутствует ярко выраженная иерархия и древовидность отношений подчинения [59]. Подробное рассмотрение сетевых структур управления выходит за рамки предмета исследования настоящей работы (краткое их описание приводится в третьем разделе настоящей работы) и является перспективным предметом будущих исследований.

Примеры различных *структур управления* (линейной, матричной и сетевой) и составляющих их элементов (соответственно - прямая, треугольная и ромбовидная структуры) приведены на рисунках 1-3 (вертикальные связи между соседними уровнями в рамках древовидной структуры обозначены тонкими линиями, взаимодействие (игра) центров - горизонтальные связи между управляющими органами - обозначены жирными линиями, межуровневое взаимодействие обозначено двойными линиями).

Стандартным порядком функционирования одноэлементной[1] ОС назовем следующий – центры выбирают одновременно свои стратегии $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, являющиеся функциями от будущего выбора агента, то есть $u_i = \hat{u}_i(y)$, $i = \overline{1,k}$, $k \geq 1$, и сообщают их агенту. Агент при известном управлении выбирает свою стратегию – действие $y \in A$, которое становится известным центрам. Множество действий агента, доставляющих при фиксированном управле-

---

[1] *В настоящей работе исследуются одноэлементные ОС РК. Специфика многоэлементных ОС подробно описана в [21, 58, 63].*

нии "максимум" его целевой функции[1], называется *множеством решений игры* или множеством действий, *реализуемых* данным управлением.

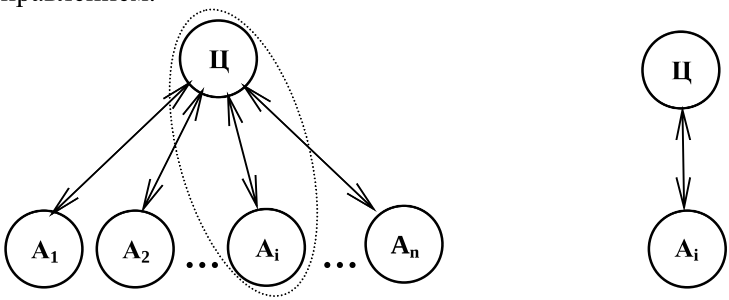

Рис. 1. Линейная структура управления и ее элемент (прямая структура управления)

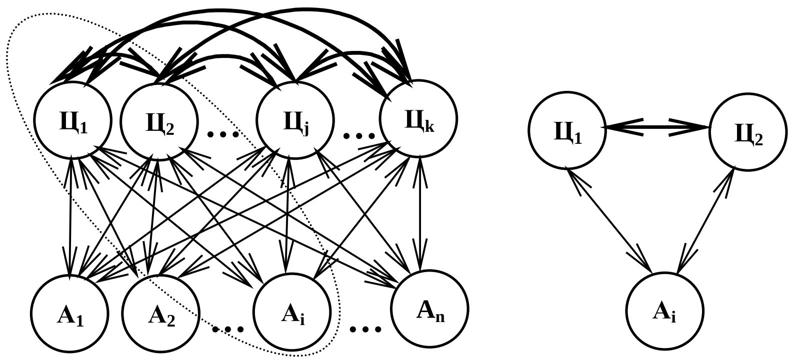

Рис. 2. Матричная структура управления и ее элемент (треугольная структура управления)

---

[1] *Употребление кавычек обусловлено следующими причинами. Во-первых, если не оговорено особо (и если на этом не надо акцентировать внимание читателя), будем считать, что все максимумы и минимумы достигаются (в противном случае будут использоваться соответственно Sup и Inf). Во-вторых, не всегда понятно, что означает "максимум" векторной функции, поэтому до тех пор, пока соответствие рационального выбора участника ОС РК не введено корректно (см. ниже), будем ограничиваться интуитивным пониманием рационального поведения.*

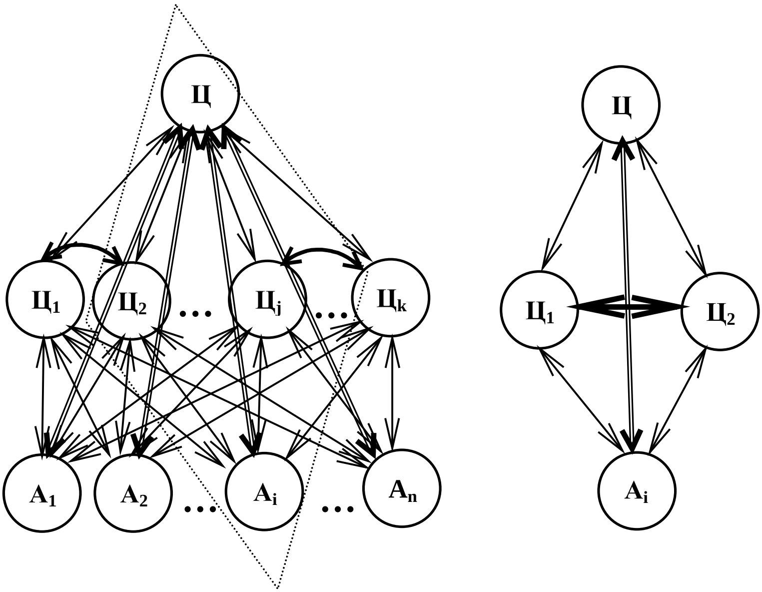

Рис. 3. Сетевая структура управления и ее элемент (ромбовидная структура управления)

При этом *стандартная информированность* участников следующая: центрам и агенту на момент принятия решений известна модель ОС S, кроме того агенту известны стратегии центров. В ходе дальнейшего изложения, если не оговорено особо, по умолчанию будем считать, что имеют место стандартные информированность и порядок функционирования.

В ОС с унитарным контролем, то есть в системе, в которой имеется единственный управляющий орган, *эффективностью управления* (гарантированной эффективностью управления) называется "максимальное" ("минимальное") значение целевой функции центра на множестве решений игры. Следовательно *задача управления* заключается в поиске допустимого управления, имеющего максимальную (или максимальную гарантированную) эффективность.

Теоретико-игровые модели управления исследовались в основном для ОС с унитарным контролем (исключениями, описывающими частные случаи, являются работы [31, 38, 39, 59, 72, 73, 87]), поэтому в настоящей работе предпринимается попытка систематического исследования ОС РК. Изложение имеет следующую структуру. В первом разделе вводится система классификаций ОС РК и выделяется совокупность базовых моделей, которые подробно исследуются во втором разделе. Следует отметить, что изложение ведется индуктивно – последовательно от самой простой модели (раздел 2.1) к наиболее общей (раздел 2.5), что позволяет наиболее отчетливо представить специфику ОС РК. Раздел 3 содержит описание обобщения ОС РК - сетевых структур управления, а также постановку и обсуждение задачи синтеза оптимальной структуры ОС, решаемой на основании исследования сетевого взаимодействия участников ОС. В заключении обсуждаются основные результаты и перспективы дальнейших исследований.

1. СИСТЕМА КЛАССИФИКАЦИЙ МОДЕЛЕЙ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ

Соответственно перечисленным во введении специфическим характеристикам ОС с распределенным контролем, можно выделить следующие основания системы их классификаций (в скобках приводятся возможные значения признаков классификации):

- множество допустимых действий АЭ (одномерное – $n_A = 1$, многомерное – $n_A \geq 2$);
- целевая функция АЭ (скалярная – f, векторная – $\vec{f}$);
- число центров (один – $k = 1$, несколько – $k \geq 2$);
- управление со стороны центров (скалярное – u, векторное – $\vec{u}$).

Перечисляя все возможные комбинации значений признаков системы классификаций[1], получаем шестнадцать базовых моделей ОС РК, описание которых приведено на рисунке 4 и в таблице 1.

---

[1] *Список оснований системы классификаций может быть расширен, например, за счет рассмотрения возможности наличия у центра векторных предпочтений, однако, учет последних производится по аналогии с*

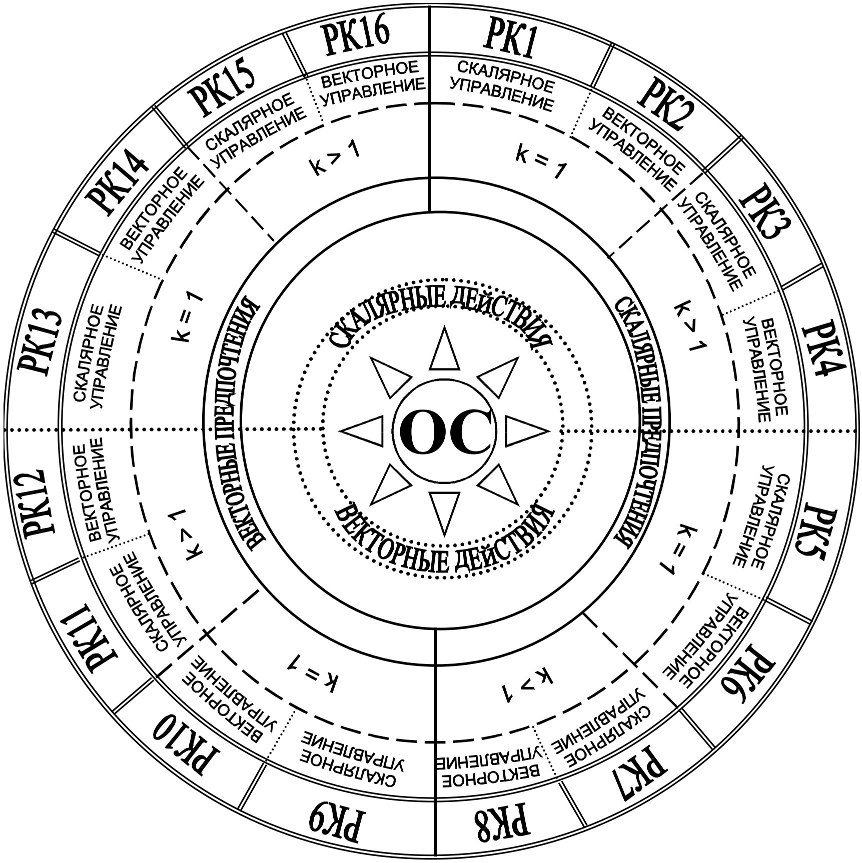

Рис. 4. Система классификаций ОС РК

учетом векторных предпочтений агента, поэтому предпочтения центра считаются скалярными (см. предположение А.0 ниже) и т.д.

Модель	Множество допустимых действий агента	Целевая функция агента	Число центров	Управ-ление
РК1	$n_A = 1$	f	$k = 1$	u
РК2	$n_A = 1$	f	$k = 1$	$\tilde{u}$
РК3	$n_A = 1$	f	$k \geq 2$	u
РК4	$n_A = 1$	f	$k \geq 2$	$\tilde{u}$
РК5	$n_A \geq 2$	f	$k = 1$	u
РК6	$n_A \geq 2$	f	$k = 1$	$\tilde{u}$
РК7	$n_A \geq 2$	f	$k \geq 2$	u
РК8	$n_A \geq 2$	f	$k \geq 2$	$\tilde{u}$
РК9	$n_A \geq 2$	$\tilde{f}$	$k = 1$	u
РК10	$n_A \geq 2$	$\tilde{f}$	$k = 1$	$\tilde{u}$
РК11	$n_A \geq 2$	$\tilde{f}$	$k \geq 2$	u
РК12	$n_A \geq 2$	$\tilde{f}$	$k \geq 2$	$\tilde{u}$
РК13	$n_A = 1$	$\tilde{f}$	$k = 1$	u
РК14	$n_A = 1$	$\tilde{f}$	$k = 1$	$\tilde{u}$
РК15	$n_A = 1$	$\tilde{f}$	$k \geq 2$	u
РК16	$n_A = 1$	$\tilde{f}$	$k \geq 2$	$\tilde{u}$

Таб. 1. Базовые модели ОС РК

Из введенной выше системы классификаций видно, что шестнадцать базовых моделей ОС РК (условно обозначенных РК1 – РК16) не являются "независимыми": модель РК12 является наиболее общей, включающей все остальные модели в качестве частных случаев. При этом простейшей моделью (базовой моделью ТАС) является модель РК1, в которой собственно распределенный контроль отсутствует. Процесс генерации моделей ОС РК (в порядке усложнения) можно представить следующим образом (см.

усложнения) можно представить следующим образом (см. рисунок 5).

В модели РК1 (условно назовем ее *моделью нулевого уровня сложности*) агент имеет скалярные множество допустимых действий и предпочтения и управляется единственным центром, стратегии которого также скалярны. При изменении одного из четырех параметров, описывающих ОС РК (A, f, k, u), модель РК1 "превращается", соответственно в модели РК5, РК13, РК3 и РК2 (на рисунке 5 переходы изображены стрелками, около которых стоит та переменная, которая изменяется при данном переходе), которые условно назовем *моделями первого уровня сложности*. Из четырех моделей первого уровня сложности можно, изменяя значения одного из неизмененных параметров, получить шесть различных *моделей второго уровня сложности* (РК9, РК7, РК6, РК15, РК14, РК4). Изменяя в последних по одному из двух неизмененных (по сравнению с моделью РК1) параметров, получим четыре *модели третьего уровня сложности* – РК11, РК10, РК8, РК16. И, наконец, изменяя в них единственный неизмененный до сих пор параметр, получаем одну (наиболее общую) модель четвертого уровня сложности – РК12. Таким образом, классы моделей ОС РК различного уровня сложности образуют иерархию, представленную на рисунке 5.

Приведенные на рисунке 5 отношения между базовыми моделями ОС РК позволяют систематизировать их изучение, поэтому во втором разделе последовательно рассматриваются базовые модели в порядке увеличения уровня сложности их класса – от нулевого (модель РК1) к максимальному (модель РК12).

Следует отметить, что не все шестнадцать определенных выше базовых моделей ОС РК как одинаково сложны для теоретического анализа и необходимы для последовательного перехода от более простых моделей к более сложным, так и представляют одинаковый интерес с точки зрения практических приложений. Как будет видно из последующего изложения, так как в ОС РК имеются два наиболее ярких свойства - наличие *игры центров* и *векторные предпочтения агента*, характерными являются четыре модели: РК 1, РК 3, РК 14 и РК 16, выделенные на рисунке 5 жирными линиями.

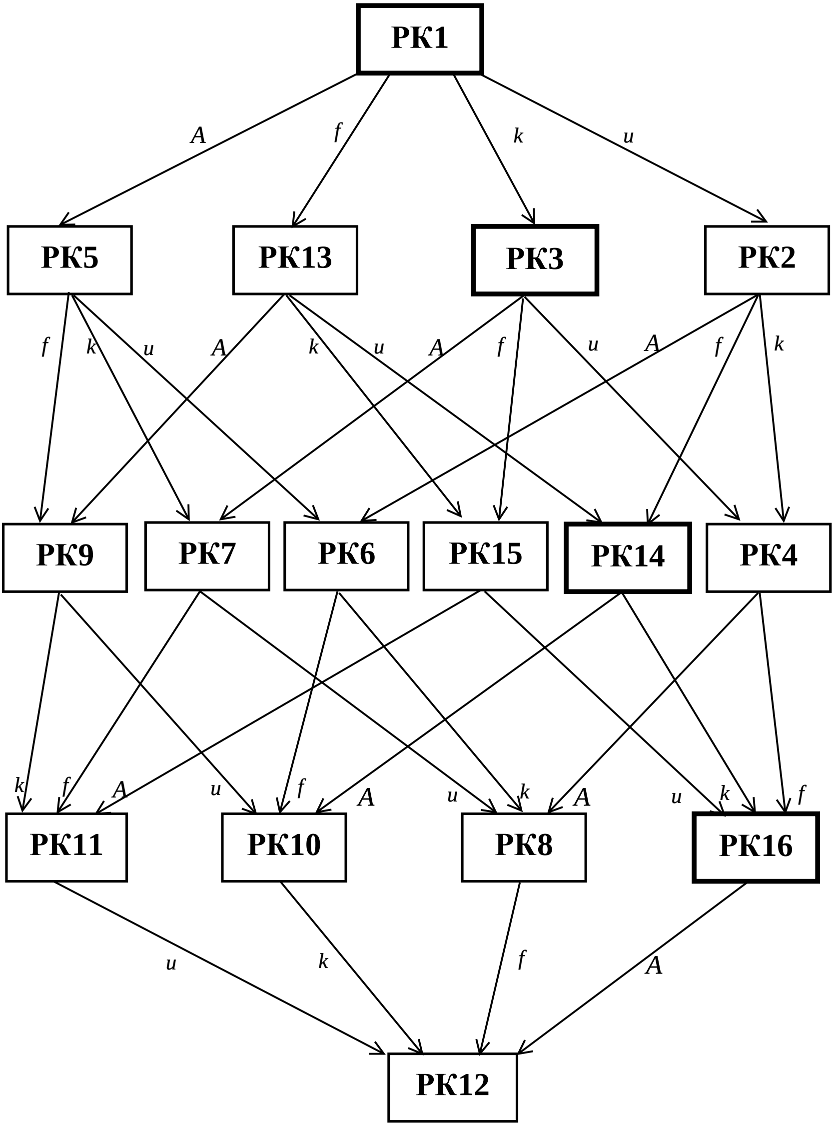

Рис. 5. Иерархия классов базовых моделей ОС РК

Объяснение сделанным акцентам следующее: модель РК 1, являясь моделью ОС с унитарным контролем, есть та точка отсчета, с которой сравниваются в процессе индуктивного усложнения все модели ОС РК; в модели РК 3 впервые появляется игра центров; в модели РК 14 впервые появляются векторные предпочтения агента, а в модели РК 16 - одновременно имеют место как игра центров, так и векторные предпочтения агента.

Несколько забегая вперед, можно сделать следующие качественные выводы. Во-первых, размерность множеств допустимых стратегий участников ОС не является существенным фактором - с теоретической точки зрения большинство результатов выглядят одинаково и для одномерных, и для многомерных множеств[1], различие обусловлено лишь тем, что отличаются содержательные интерпретации (например, формулировка задачи стимулирования возможна не для всех комбинаций признаков, различающих базовые модели – см. раздел 2). Во-вторых, наличие векторных предпочтений агента вызывает значительные трудности в основном в силу того, что понятие рационального выбора в этой ситуации неоднозначно с точки зрения теории принятия решений. И, наконец, в третьих, наиболее интересные (с субъективной точки зрения авторов) эффекты в ОС РК (по сравнению с ОС с унитарным контролем) возникают при наличии нескольких центров, которые вовлечены в игру на этапе согласованного определения управлений. Перейдем к последовательному описанию базовых моделей ОС РК.

[1] *Все результаты, полученные для модели РК 1 справедливы и в модели РК 5, для модели РК 13 - в модели РК 9, для модели РК 3 - в модели РК 7, для модели РК 2 - в модели РК 6 и т.д. - см. рисунок 5 и раздел 2.*

2. ИССЛЕДОВАНИЕ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ

2.1. Модель организационной системы с унитарным контролем (модель РК1)

Рассмотрим базовую модель организационной системы с унитарным контролем – модель РК1. Отметим, что данная модель является базовой для теории активных систем (и собственно распределенный контроль в ней отсутствует) - с ее изучения начинается исследование всех моделей ОС (многоэлементных, многоуровневых, динамических и т.д.), то есть она является той "точкой отсчета", с которой сравниваются более сложные модели, обладающие соответствующей спецификой.

В общем случае модель одноэлементной, статической, двухуровневой ОС описывается заданием целевых функций и допустимых множеств участников системы – центра и агента (активного элемента (АЭ) в терминах ТАС), то есть $S = \{F(\cdot), f(\cdot), U, A\}$, а также информированностью участников и порядком функционирования.

Относительно информированности и порядка функционирования предположим следующее[1]. На момент принятия решений и центр, и агент имеют полную и достоверную информацию относительно S (условно этот этап отражен "нулевым" шагом на рисунке 6). Центр выбирает свою стратегию u Î U, являющуюся функцией от действия агента[2], то есть $u = \hat{u}(y)$, и сообщает ее агенту (первый шаг). Затем агент при известной ему стратегии центра выбирает свое действие y Î A (второй шаг), которое наблюдается центром и определяет значения целевых функций участников: $F(u, y)$ и $f(u, y)$ (третий шаг - см. рисунок 6).

---

[1] *Напомним, что выше было введено предположение о том, что имеют место стандартные порядок функционирования и информированность, которые иллюстрируются рисунком 6.*

[2] *Отметим, что в настоящей работе символ "^" над стратегией центра обозначает, что рассматривается функция от стратегий агента.*

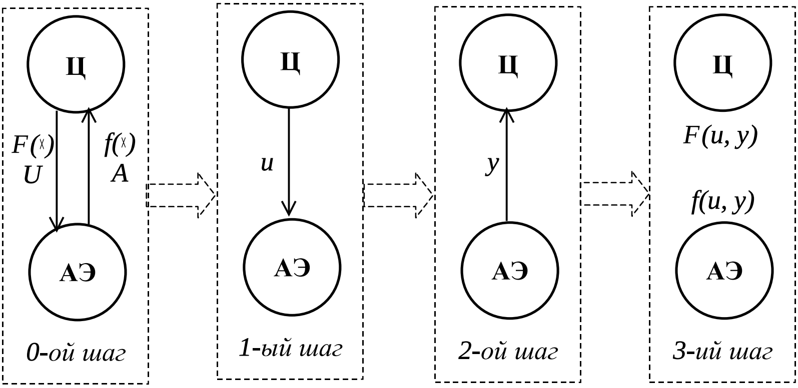

Рис. 6. Стандартный порядок функционирования ОС

Относительно целевой функции центра ниже всюду, то есть при рассмотрении всех моделей ОС РК, считается, что выполнено следующее предположение[1].

А.0. Целевая функция центра (центров в моделях с несколькими управляющими органами) скалярна: $F: U \times A \to \Re^1$.

Модель РК1, обозначаемая $S_{РК1}$, характеризуется наличием одного центра, выбирающего скалярные управления, то есть $u: A \to \Re^1$, а также скалярным множеством допустимых действий агента и скалярными предпочтениями агента. Таким образом, $S_{РК1} = \{n_A = 1, f, k = 1, u\}$, то есть модель РК1 описывается *игрой* $Г_2$ (в терминологии теории иерархических игр (ТИИ) [31, 33, 45])[2].

Будем считать, что при выборе стратегий участники следуют *гипотезе рационального поведения*, то есть выбирают соответствующие стратегии, стремясь максимизировать значение своей целевой функции. Это, в частности, означает, что агент выбирает

---

[1] *Возможность наличия векторных предпочтений центра описывается по аналоги с тем как это делается ниже для агента.*

[2] *Далее по "игрой" будем понимать игру типа $Г_2$ или ее модификации.*

одно из действий, реализуемых управлением $u \in U$, назначенным центром, то есть $y \in P(u)$, где[1]

(1) $P(u) = Arg \max\limits_{y \in A} f(u, y)$.

Напомним, что множество $P(u)$ называется множеством решений игры, или множеством действий, реализуемых данным управлением.

Для определения эффективности управления необходимо доопределить рациональный выбор агента, то есть указать то конкретное его действие, на выбор которого рассчитывает центр при использовании управления $u \in U$. Среди возможных подходов наиболее распространены два "предельных" – гипотеза благожелательности (ГБ), в рамках которой считается, что агент выбирает из множества решений игры наиболее благоприятное для центра действие, и принцип максимального гарантированного результата (МГР), в соответствии с которым центр вправе рассчитывать на выбор агентом наихудшего (с точки зрения центра) реализуемого действия.

Следовательно, в рамках ГБ можно определить эффективность управления $K(u)$ (соответственно, в рамках МГР – гарантированную эффективность управления $K_g(u)$) как максимальное (минимальное) по множеству решений игры значение целевой функции центра:

(2) $K(u) = \max\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$,

(3) $K_g(u) = \min\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$.

Задача управления (задача синтеза оптимальных управлений) заключается в выборе допустимых управлений, имеющих максимальную эффективность (или максимальную гарантированную эффективность):

(4) $K(u) \to \max\limits_{u \in U}$,

(5) $K_g(u) \to \max\limits_{u \in U}$.

---

[1] *В настоящей работе принята независимая внутри каждого подраздела нумерация формул.*

Обозначим максимальные значения функционалов (4) и (5) соответственно:

(6) $K^* = \max\limits_{u \in U} \max\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$

и

(7) $K_g^* = \max\limits_{u \in U} \min\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$,

а оптимальные управления соответственно:

(8) $u^* = arg \max\limits_{u \in U} \max\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$

и

(9) $u_g^* = arg \max\limits_{u \in U} \min\limits_{y \in P(u)} F(u, y)$.

Управление u_e Î U называется ε-оптимальным, если выполнено:

K^* - $K(u_e)$ £ e, e ³ 0.

Аналогичным образом определяется гарантированная ε-оптимальность. Понятно, что если на величину e не наложить никаких ограничений, то при минимальных предположениях для любого допустимого управления в рамках ГБ найдется такое значение e ³ 0, что это управление будет ε-оптимальным [52, 60, 66].

Введем следующее предположение[1]:

А.1. Функции $F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ непрерывны на компактах U и A.

Стратегия наказания $u_н$ агента центром соответствует минимизации целевой функции агента по стратегии центра:

(10) $f(\hat{u}_н(y), y) = \min\limits_{u \in U} f(u, y)$.

Абсолютно оптимальная стратегия центра u_0 соответствует максимизации его целевой функции по собственной стратегии:

(11) $F(\hat{u}_0(y), y) = \max\limits_{u \in U} F(u, y)$.

---

[1] *Отметим, что предположение А.1 не подразумевает "скалярности" множеств допустимых стратегий участников ОС, то есть результаты теорем 1-4, приводимых ниже, имеют место и для векторных действий агента, и для векторных управлений центра, однако при этом предпочтения участников считаются скалярными.*

Следуя терминологии и обозначениям [31], введем некоторое малое $e > 0$ и следующие величины и множества: L - максимальное гарантированное значение целевой функции агента:

(12) $L = \max\limits_{y \in A} f(\hat{u}_{\text{н}}(y), y)$;

E - множество действий агента, обеспечивающих ему получение выигрыша не менее L:

(13) E = {y Î A | $f(\hat{u}_{\text{н}}(y), y) = L$};

D - множество пар стратегий центра и агента, при которых значение целевой функции агента строго превышает ее максимальное гарантированное значение:

(14) D = {(u, y) Î U ´ A | $f(u, y) > L$};

K_1 - максимальное на множестве D значение целевой функции центра:

(15) $K_1 = \begin{cases} \sup\limits_{(u,\,y) \in D} \Phi(u, y), & D \neq \varnothing \\ -\infty, & D = \varnothing \end{cases}$;

K_2 - максимальное на множестве E значение целевой функции центра:

(16) $K_2 = \min\limits_{y \in E} \max\limits_{u \in U} F(u, y)$;

(u_e, y_e) Î D ¹ Æ - пара ε-оптимальных стратегий центра и агента:

(17) $\Phi(u_e, y_e) \geq K_1 - e$.

Решение задачи (5) дается следующей теоремой.

Теорема 1 [31, 33]. Пусть выполнено предположение А.1. Тогда $K_g^* = max\ \{K_1, K_2\} - e,\ e > 0$, а стратегия

(18) $u_e^* = \begin{cases} u_e, \text{ если } y = y_e,\ K_1 > K_2 \\ u_0, \text{ если } y \in E,\ K_1 \leq K_2 \\ u_{\text{н}}, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$

является гарантированно ε-оптимальной стратегией центра.

Введем в рассмотрение множество D_0 - множество пар стратегий центра и агента, при которых значение целевой функции агента не меньше ее максимального гарантированного значения:

(19) D_0 = {(u, y) Î U ´ A | $f(u, y)$ ³ L}.

Очевидно, " y Î E $(u_н, y)$ Î D_0. Решение задачи (4) дается следующей теоремой.

<u>Теорема 2а</u> [31, 33]. Пусть выполнено предположение А.1 и ГБ. Тогда

$$(20)\ K^* = \max_{(u,\,x)\in D_0} F(u,\,x),$$

а стратегия

$$(21)\ u^* = \begin{cases} \tilde{u}^*, \text{если } y = x^* \\ u_{\text{н}}, \text{если } y \neq x^* \end{cases},$$

где

$$(22)\ (\tilde{u}^*,\, x^*) = arg \max_{(u,y)\in D_0} F(u,y)$$

является оптимальной стратегией центра.

Величина x^* Î A, фигурирующая в утверждении теоремы 2а, является *планом* - желательным с точки зрения центра состоянием агента [17-19, 23, 53].

Содержательно результат теоремы 2а означает, что агент наказывается в случае выбора им стратегии, отличной от плана, и поощряется при выполнении плана. В последнем случае его выигрыш не меньше того, что он мог бы получить при использовании центром стратегии наказания. Легко видеть, что x^* Î $P(u^*)$, то есть план x^*, определяемый как решение задачи (19)-(22), является согласованным [23].

В теореме 2а оптимальное управление определялось на множестве (19), то есть рассматривались пары управлений и действий агента, обеспечивающие последнему выигрыш не менее максимального гарантированного. Возможен альтернативный подход, приводящий к тому же результату, который основывается на использовании *метода "минимальных затрат" центра на управление*[1]. Этот метод заключается в следующем.

---

[1] *Не очень удачный термин "затраты" обусловлен тем, что впервые этот метод использовался в задачах стимулирования, в которых управление интерпретировалось как затраты центра на стимулирование агента [20, 82, 85].*

Определим для каждого действия агента $y \in A$ множество $U(y) \subseteq U$ управлений, реализующих эти действия:

$$U(y) = \{u \in U \mid y \in P(u)\}.$$

Обозначим $P(U) = \bigcup_{u \in U} P(u) \subseteq A$ - множество тех действий агента, которые могут быть реализованы при заданных ограничениях на управление. Управление u_{min}, реализующее заданное действие и максимизирующее целевую функцию центра, называется "минимальными затратами" центра на управление по реализации этого действия: $u_{min} = arg \max_{u \in U(y)} F(u, y)$.

<u>Теорема 2б</u>. Пусть выполнено предположение А.1 и ГБ. Тогда стратегия

$$u_{\min}^* = \begin{cases} u_{\min}, \text{ если } y = y^* \\ u_{\text{н}}, \quad \text{если } y \neq y^* \end{cases},$$

где $y^* = arg \max_{y \in P(U)} F(\hat{u}_{\min}(y), y)$, является оптимальной стратегией центра[1].

Доказательство. Докажем, что при использовании подхода "минимальных затрат" на управление эффективность управления не снижается, то есть покажем, что $K(u_{\min}^*) = K^*$.

Во-первых, в силу ГБ при использовании центром управления $u_{\min}^*$ агент выбирает действие y^*. Во-вторых, так как по определению имеет место $K^* = \max_{(u,\, x) \in D_0} F(u, x)$, $K(u_{\min}^*) = F(\hat{u}_{\min}(y^*), y^*)$, то достаточно показать, что $\max_{(u,\, x) \in D_0} F(u, x) = F(\hat{u}_{\min}(y^*))$, то есть, что $\max_{(u,\, x) \in D_0} F(u, x) = \max_{y \in P(U)} \max_{u \in U(y)} F(u, y)$.

---

[1] *Частный случай теоремы 2б (для задач стимулирования) доказан в [46, 62].*

Обозначим $D' = \{(u, y) \in U \times A \mid y \in P(U), u \in U(y)\}$ - множество пар стратегий центра и агента, по которым вычисляются максимумы при определении эффективности управления $u^*_{\min}$.

Предположим противное, то есть пусть $K(u^*_{\min}) < K^*$, следовательно должны найтись управление u^* и действие x^*, принадлежащие множеству D_0, доставляющие максимум по этому множеству целевой функции центра и не принадлежащие множеству D'. Но действие x^* при этом непременно должно быть реализуемо, причем именно управлением u^*. Следовательно, $(u^*, x^*) \in D'$ - противоречие. Более того, стратегии $\tilde{u}^*$ и u_{min}, фигурирующие в теоремах 2а и 2б соответственно, могут быть выбраны совпадающими. •[1]

Таким образом, в рамках ГБ для решения задачи синтеза оптимальных управлений возможно использование как результата теоремы 2а, так и теоремы 2б. Во многих практически важных частных случаях (см. ниже) применение теоремы 2б менее трудоемко и позволяет приводить более простые содержательные интерпретации.

Проведем качественное обсуждение различий ГБ и принципа МГР см. также теорему 4 ниже). Различие между утверждениями теорем 1 и 2 (под теоремой 2 понимаются теоремы 2а и 2б) имеет место, если для оптимального решения (22) выполнено $f(u^*, x^*) = L$ (в противном случае, то есть при $f(u^*, x^*) > L$, единственный оптимальный выбор агента – стратегия x^*). В данном случае центр сравнивает два механизма[2] (см. теорему 1). В первом механизме назначается ε-оптимальное управление, являющееся решением задачи (15), (17) и гарантирующее агенту значение целевой функции строго большее, чем L. Эффективность этого механизма равна K_1. Во втором механизме центр побуждает агента выбрать одну из стратегий из множества E и назначает абсолютно оптимальную при

---

[1] *Символ «·» здесь и далее обозначает окончание доказательства, примера и т.д.*

[2] *Механизмом управления в широком смысле называется совокупность методов, правил, процедур и т.д., регламентирующих взаимодействие участников ОС. В узком смысле механизм управления – правило принятия решений центром [23, 26, 61], то есть – стратегия центра в широком смысле (см. выше).*

этом выборе агента собственную стратегию. Эффективность этого механизма равна K_2. В обоих случаях центр предлагает агенту выигрыш не менее L, угрожая использованием стратегии наказания. Как следует из (18), центр выбирает механизм, обладающий наибольшей эффективностью.

Результат теоремы 1 может быть упрощен при введении дополнительных предположений (обеспечивающих выполнение $K_1 \geq K_2$).

<u>Следствие 3</u> [31, 33]. Если функция $f(\cdot)$ не имеет локальных максимумов со значением L на $U \times A$ и $\max\limits_{(u,y)\in U\times A} f(u, y) > L$, то стратегия

$$(23)\quad u_e^* = \begin{cases} u_e, \text{ если } y = y_e \\ u_{\text{н}}, \text{ если } y \neq y_e \end{cases}$$

является гарантированно ε-оптимальной стратегией центра.

В частности, условия следствия 3 выполнены, если центр может использовать побочные платежи, что достаточно распространено в прикладных моделях управления социально-экономическими системами [23, 30, 62].

Напомним, что в *игре с побочными платежами* целевые функции центра и агента имеют соответственно вид:

$$F_s(u, z, y) = F(u, y) - z,\ f_s(u, z, y) = f(u, y) + z,$$

где $z \in [0; C]$, $C > 0$, то есть z - выплаты центра агенту. При этом стратегией центра является выбор пары (u, z), $u \in U$, $z \in [0; C]$.

Если появляется возможность использования побочных платежей, то множества L и E, стратегия наказания $(u_н, 0)$, абсолютно оптимальная стратегия $(u_0, 0)$, а также значение K_2, введенные выше, не изменятся, а множество D и значение K_1 примут соответственно вид:

$$(24)\quad D(C) = \{(u, z, y) \mid f(u, y) + z > L,\ 0 \leq z \leq C\},$$

$$(25)\quad K_1(C) = \sup_{(u,z,y)\in D(C)} \{F(u, y) - z\} =$$

$$= \max_{\substack{(u,\, y) \\ f(u,y) \geq L - C}} \min \{F(u, y)\ ;\ F(u, y) + f(u,y) - L\},$$

причем ε-оптимальной будет стратегия (23), где $z_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(y)$, $\sigma_\varepsilon: A \to [0; C]$, и $0 < \sigma_\varepsilon(y_\varepsilon) < \varepsilon \le C$, а $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ определяется (15), (17) [30, 31].

Таким образом, в игре с побочными платежами стратегией центра является выбор $\{u = \hat{u}(y), z = \sigma(y)\}$, что позволяет использовать простые стратегии типа (23).

Важным частным случаем рассматриваемой модели управления является *модель стимулирования*, описываемая игрой Γ_2 с побочными платежами, в которой целевые функции $F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ не зависят явным образом от управления $u \in U$ (см. подробное описание и содержательные интерпретации в [46, 62], а также ниже). Обозначим эту игру Γ_σ. В модели стимулирования стратегия центра $z = \sigma(y)$ называется[1] *функцией стимулирования* (механизмом стимулирования, системой стимулирования - см. обсуждение терминологических различий в [62]), стратегия $y \in A$ агента называется его *действием*, а величина $C > 0$ – *ограничением механизма стимулирования*[2].

Для двух практически важных случаев связь между гарантированной оптимальностью и оптимальностью в рамках ГБ устанавливается следующей теоремой (см. также результаты, приведенные в [30, 31, 60]).

<u>Теорема 4.</u> Пусть выполнено предположение А.1 и (u^*, x^*) - решение задачи (20), (21), имеющее в исходной игре Γ_2 с побочными платежами или без них в рамках ГБ эффективность K^*. Тогда, если выполнено одно из следующих условий:

1) $z^* = \sigma^*(x^*) < C$;

2) исходная игра является игрой Γ_σ,

то в соответствующей игре с побочными платежами ($C > 0$) существуют $\varepsilon > 0$ и $(u_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) \in U \times [0; C]$ такие, что $K_g(u_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) \ge K^* - \varepsilon$.

---

[1] *При рассмотрении моделей стимулирования зависимость от стратегии центра в записи целевых функций $F(\cdot)$ и $f(\cdot)$ будет опускаться.*

[2] *Можно рассматривать и отрицательное по знаку стимулирование ($z \le 0$) агента, которое может интерпретироваться как штрафы, выплачиваемые центру.*

Доказательство. Если $P(u^*) = \{x^*\}$, то, независимо от наличия или отсутствия в исходной игре побочных платежей (условия 1 и 2 не требуются!), выбрав $u_\varepsilon^* = u^*$, $z_\varepsilon^* = 0$, получим, что

$$K_g(u_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) = K^*.$$

Если $\exists\, y' \neq x^*,\ x^*, y' \in P(u^*) \subseteq A$, то есть $f(u^*, y') = f(u^*, x^*)$ и $F(u^*, y') < F(u^*, x^*)$, тогда возможно, что для $\varepsilon > 0$ выполнено $\forall\ (u, z)\ \ K^* - K_g(u, z) > \varepsilon$.

Если в исходной игре отсутствовали побочные платежи, то введем их, то есть построим стратегию (u_ε^*, z_ε^*) следующим образом[1]:

(26) $u_\varepsilon^* = u^*,\ z_\varepsilon^* = \sigma_\varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon, & y = x^* \\ 0, & y \neq x^* \end{cases},$

где $\varepsilon \in (0; C]$ - произвольное (даже сколь угодно малое!) положительное число. Содержательно предельное значение $K_1(0)$ (см. выражение (25)) есть реализация ГБ в исходной игре без побочных платежей. Если в исходной игре имелись побочные платежи, удовлетворяющие первому пункту условий теоремы, то есть $z^* = \sigma^*(x^*) < C$, то в (26) следует выбрать $\sigma_\varepsilon(x^*) = \sigma^*(x^*) + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leq C - \sigma^*(x^*)$.

Если $x^* \in P(u^*)$, то $P(u_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) = \{x^*\}$. При этом имеет место: $K_g(u_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*) = K^* - \varepsilon$.

Осталось рассмотреть случай, когда в исходной игре, являющейся игрой типа Γ_σ (см. второй пункт условий теоремы), присутствовали побочные платежи, причем $z^* = \sigma^*(x^*) = C$ (иначе попадаем в условия уже доказанного первого пункта условий теоремы)[2].

---

[1] *Содержательно в (26) производится увеличение степени централизации механизма управления (см. определения и обсуждение в [17-19, 23, 44]). В ТАС известен следующий результат: на множестве согласованных механизмов управления оптимален механизм с максимальной степенью централизации [23].*

[2] *Более общий случай (когда исходная игра не является игрой типа Γ_σ) обсуждается в [31].*

В задаче стимулирования целевые функции центра и агента имеют соответственно вид:

(27) $\Phi_\sigma(z, y) = \Phi(y) - z$,

(28) $f_\sigma(z, y) = f(y) + z$.

Фиксируем некоторое малое $\varepsilon > 0$ и введем в рассмотрение следующие множества:

(29) $B(x^*, \varepsilon) = \{y \in A \mid \Phi(x^*) - \Phi(y) \le \varepsilon\}$,

(30) $P(C) = \{y \in A \mid f(y) \ge L - C\}$.

Если функции $\Phi(\cdot)$ и $f(\cdot)$ монотонны, то в силу предположения А.1 $B(x^*, \varepsilon)$ и $P(C)$ – замкнутые множества.

Сделав маленькое отступление, отметим, что содержательно $B(x^*, \varepsilon)$ - множество таких действий агента, на которых значение функции $\Phi(\cdot)$ меньше, чем максимальное значение в исходной игре не более, чем на ε, то есть, если при некотором $y' \in B(x^*, \varepsilon)$ $\sigma(y') = C$, то значение целевой функции центра не меньше, чем $K^* - \varepsilon$, причем в силу того, что рассматривается случай, при котором выполнено $z^* = \sigma^*(x^*) = C$, последнее значение равно $\Phi(x^*) - C - \varepsilon$. Множество $P(C)$ представляет собой множество таких действий агента, которые обеспечивают ему значение функции $f(\cdot)$ не меньшее, чем L. Как мы увидим в дальнейшем (см. также выражения (19) и (25)) в задаче стимулирования множество $P(C)$ есть максимальное множество действий агента, реализуемых при данном ограничении C механизма стимулирования. Вернемся к доказательству.

Из предположения А.1 следует, что $\forall \varepsilon \in (0; C]$ $x^* \in B(x^*, \varepsilon) \cap P(C) \ne \varnothing$.

Если $\forall \varepsilon \in (0; C]$, $\forall y \in B(x^*, \varepsilon) \cap P(C)$ выполнено $f(y) \le f(x^*) = L - C$, то $z^* = 0$ - противоречие. Таким образом $\exists \varepsilon \in (0; C]$ $\exists y_\varepsilon \in B(x^*, \varepsilon) \cap P(C)$: $f(y_\varepsilon) > f(x^*)$. Отметим, что если функция $f(\cdot)$ строго монотонна[1], то в рамках предположения А.1, величина ε может быть выбрана сколь угодно малой.

---

[1] *Достаточным является выполнение более слабого условия – отсутствия у функции $f(\cdot)$ в точке x^* локального максимума со значением $L - C$.*

Используя систему стимулирования

$$(31)\ z_e^* = \begin{cases} C, & y = y_e \\ 0, & y \neq y_e \end{cases},$$

центр обеспечивает единственность точки максимума целевой функции агента, то есть $P(z_e^*) = \{y_e\}$.

Из (29) следует, что потери центра от реализации действия y_e по сравнению с действием x^* не превышают e, что и требовалось доказать. •

Рекламный вариант теоремы 4 может быть сформулирован следующим образом: 1) за счет увеличения или введения при их отсутствии побочных платежей гарантированная эффективность управления может быть сделана сколь угодно близкой к эффективности управления в рамках гипотезы благожелательности; 2) в задаче стимулирования гарантированная эффективность управления может быть сделана сколь угодно близкой к эффективности управления в рамках гипотезы благожелательности[1].

Следствие 5[2]. Пусть имеются две игры, отличающиеся лишь ограничениями на размер побочных платежей, а побочные платежи удовлетворяют следующему условию: $C_1 \geq 0$, $C_2 > C_1$. Тогда для эффективностей управления в этих играх выполнено $K_1 \leq K_2$.

Следствие 6. При отсутствии ограничений на размер побочных платежей ($C = +\infty$) результат теоремы 4 справедлив без дополнительных условий типа 1 или 2.

Теорема 4 имеет важное методологическое значение, так как она устанавливает связь между эффективностью и гарантированной эффективностью управления (понятно, что при выборе агентом любого действия из множества $P(u)$ эффективность управления $u \in U$ будет не выше оценки, даваемой выражением (2), и не ниже оценки, даваемой выражением (3)). Из теоремы 4 также следует, что в рамках введенных предположений для любого оптимального в рамках ГБ управления существует сколь угодно мало отличаю-

---

[1] *За исключением случая, когда $f(x^*) = L - C$ и x^* - точка локального максимума.*

[2] *Аналогичные утверждения, полученные в ТАС [23, 62], формулировались следующим образом: с ростом ограничений механизма стимулирования его эффективность не уменьшается.*

щееся от него по эффективности гарантированно ε-оптимальное управление. Поэтому результат теоремы 4 дает нам возможность при рассмотрении моделей ОС РК ограничиться случаем гипотезы благожелательности, то есть предполагать благожелательное отношение агента к центру (следует отметить, что для случая нескольких центров ГБ доопределяется ниже), так как отказ от ГБ, то есть переход к методу МГР при определении выбора агента, слабо изменяет эффективность управления, но иногда существенно затрудняет поиск решения (ср. для примера стратегии (21) и (18)).

Итак, в рамках достаточно общих предположений, отражающих специфику рассматриваемых задач управления, эффективность управления (определяемая в рамках гипотезы благожелательности) и гарантированная эффективность управления[1] слабо отличаются друг от друга (см. выражения (26), (29) и (31), в которых величина e, аддитивно входящая в целевую функцию центра, может быть выбрана сколь угодно малой). Поэтому **в ходе дальнейшего изложения результатов исследования теоретико-игровых моделей ОС РК, если не оговорено особо, будем считать, что выполнена гипотеза благожелательности**, в рамках которой решение задачи управления для базовой модели дается теоремой 2.

Чрезвычайно важным (как с теоретической - см. теорему 4, так и с практической точек зрения[2]) частным случаем задачи управления ОС РК является задача стимулирования (см. определение выше). Поэтому при рассмотрении всех шестнадцати базовых моделей ОС РК будем, наряду с общими теоретическими результатами (которые иногда настолько сложны и громоздки, что не допускают простых содержательных интерпретаций), рассматривать в качестве примера модель стимулирования в соответствующей ОС.

---

[1] *Необходимо отметить, что речь идет о максимальных значениях функционалов (2) и (3), достигаемых на вообще говоря различных управлениях - см. обсуждение проблем устойчивости решений задач управлений и адекватности моделей в [31, 43, 51, 52, 60, 66].*

[2] *С теоретической точки зрения задача стимулирования представляет интерес в частности потому, что для нее удается получить простое аналитическое решение. С практической точки зрения она описывает широкий класс прикладных задач мотивации, управления персоналом и т.д. [37, 46, 62, 77, 80-85].*

Задача стимулирования в модели РК1.

Для того, чтобы различать игру Γ_σ как частный случай игры Γ_2 введем следующие определения: целевые функции участников ОС имеют вид:

(32) $F_\sigma(z, y) = F(y) - z = W(\sigma, y) = H(y) - \sigma(y)$,

(33) $f_\sigma(z, y) = f(y) + z = w(\sigma, y) = \sigma(y) - c(y)$,

где $H(y)$ - функция дохода центра, $c(y)$ - функция затрат агента (то есть $H(y) = F(y)$, $\sigma(y) = \hat{z}(y)$, $f(y) = -c(y)$), удовлетворяющие следующему предположению.

А.2. $A = \Re^1_+$, $H(\cdot)$ и $c(\cdot)$ - непрерывные строго возрастающие функции, $H(0) = c(0) = 0$.

А.2'. А.2 и $H(\cdot)$ - вогнутая, $c(\cdot)$ - выпуклая дифференцируемые функции.

Содержательно, действием агента могут являться число отработанных часов, объем выпуска и т.д. Доход центра и затраты агента зависят от действия последнего, причем целевая функция центра представляет собой разность между его доходом и стимулированием – вознаграждением, выплачиваемым агенту, а целевая функция агента – разность между стимулированием, полученным от центра и затратами[1].

Несколько забегая вперед отметим, что при рассмотрении задач стимулирования[2] под *векторной целевой функцией агента* (случай $\vec{f}$) будем понимать векторную функцию затрат, то есть $c: A \to \Re^{n_f}$, $n_f \geq 2$. Аналогично, при векторных управлениях (случай $\vec{u}$) будем считать, что целевая функция центра скалярна и

---

[1] Аддитивность" целевых функций подразумевает, что доход центра, затраты агента и стимулирование измеряются в одних и тех же единицах, например, в рублях или каких-либо условных единицах.

[2] Необходимость доопределения того, что понимается под векторными целевыми функциями и управлениями (то есть согласования различных значений признаков оснований системы классификаций, введенной в разделе 1.1) возникает из-за того, что выше предполагалось, что целевая функция центра скалярна, а в задаче стимулирования управление аддитивно входит в целевые функции участников ОС, причем остальные слагаемые не зависят от управления.

определяется *суммарными затратами на стимулирование*, определяемыми следующим образом:

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n_A} s_i(y),$$

где $s_i(y)$ - стимулирование за i-ю компоненту вектора действий.

Введенные выше величины и множества в игре $Г_\sigma$ имеют следующий вид:

$$s_н(y) = 0;\ L = \min_{y \in A} c(y) = 0;\ E = \{0\};\ K_2 = 0.$$

Выражение (24) примет в игре $Г_\sigma$ вид:

(34) $D_0(C) = \{(s(y), y) \mid C$ ³ $s(y)$ ³ $c(y)\}$,

выражение (25) примет в игре $Г_\sigma$ вид:

(35) $K_1(C) = \max\limits_{\substack{(s(y),\, y) \\ C \geq s(y) \geq c(y)}} min\ \{F(u, y)\ ;\ F(u, y) + f(u,y) - L\}$,

выражение (30) примет в игре $Г_\sigma$ вид:

(36) $P(C) = \{y$ Î $A \mid c(y)$ £ $C\}$.

В силу предположения А.2 эффективность управления (35) равна:

(37) $K_1(C) = \max\limits_{y \in P(C)} \{H(y) - c(y)\}$,

оптимальное реализуемое действие y^* равно[1]

(38) $y^*(C) = arg \max\limits_{y \in P(C)} \{H(y) - c(y)\}$,

а максимальное множество (36) реализуемых при заданных ограничениях механизма стимулирования действий равно

(39) $P(C) = [0;\ y^+(C)]$,

где

(40) $y^+(C) = max\ \{y$ Î $A \mid c(y)$ £ $C\}$.

---

[1] *Если выполнено предположение А.2', то выражение (38) может быть записано в виде:* $\dfrac{dH(y^*)}{dy} = \dfrac{dc(y^*)}{dy}$. *Данное условие в экономике интерпретируется следующим образом: заработная плата является эффективной, если предельный продукт агента равен его предельной производительности [42, 46, 75].*

Теорему 2 (см. выражения (24), (25)) для игры $Г_σ$ сформулируем в виде отдельной теоремы, имеющей множество аналогов в [31, 46, 62].

<u>Теорема 7.</u> Пусть выполнены предположения А.1, А.2 и ГБ. Тогда система стимулирования

(41) $s^*(y) = \begin{cases} c(y), & y = y^*(C) \\ 0, & y \neq y^*(C) \end{cases},$

где $y^*(C)$ удовлетворяет (38), является оптимальной системой стимулирования, эффективность которой определяется выражением (37).

Легко видеть, что в рамках введенных предположений множество реализуемых действий состоит из двух точек, то есть

$$P(s^*) = \{0\} \text{ È } \{y^*\}.$$

В силу гипотезы благожелательности агент выбирает действие y^*. Если ориентироваться на метод максимального гарантированного результата, то гарантированная эффективность управления (41) равна $K_g(s^*) = H(0) - c(y^*) < K_1(C)$. Используя систему стимулирования

(42) $s_e(y) = \begin{cases} c(y) + e/2, & y = y_e \\ 0, & y \neq y_e \end{cases},$

где $e > 0$, y_e Î $B(y^*, e/2)$ Ç $P(C)$ в силу предположения А.2 и (29) получаем, что $K_g(s_e)$ ³ $K_1(C) - e$ (ср. с доказательством теоремы 4 - в силу). Строго положительная величина e при этом может быть выбрана сколь угодно малой.

Система стимулирования (41) в ТАС получила название *квазикомпенсаторной* (К-типа) [46, 61, 62]. Содержательно, ее использование означает компенсацию центром затрат агента в случае выбора последним наиболее предпочтительного для центра действия. Система стимулирования

(43) $s_C(y) = \begin{cases} C, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases},$

где x Î $P(C)$, получила название *квазискачкообразной* [46, 61, 62], а система стимулирования

(44) $s_L(y) = a\ y,$

где a ³ 0 получила название *пропорциональной* (или линейной) системы стимулирования [46, 61, 62]. Понятно, что, если (41) - оптимальная система стимулирования, то любые другие системы стимулирования (в том числе – (43), (44)) имеют не большую эффективность (см. оценки сравнительной эффективности различных систем стимулирования в [46, 62]).

Теорема 7 является непосредственным следствием теоремы 4. В то же время, для игры Γ_σ можно доказать справедливость утверждения теоремы 7 используя специфику задачи стимулирования, то есть не прибегая к использованию общих результатов, полученных для игр типа Γ_2. Для этого введем следующее определение. *Минимальными затратами на стимулирование* по реализации действия y Î $P(C)$ в классе допустимых систем стимулирования M (классом систем стимулирования называется подмножество множества U: например, класс пропорциональных систем стимулирования (с параметром a ³ 0), класс скачкообразных систем стимулирования (с параметром x Î $P(C)$) и т.д.) называется следующая величина: $s_{min}(y) = \min\limits_{s \in M} \{s(y) \mid y \in P(s)\}$, то есть минимальное допустимое вознаграждение, которое побудит агента выбрать заданное действие. Для тех действий, которые в рамках предположения А.2 не могут быть реализованы в классе M, положим минимальные затраты на стимулирование равными бесконечности: $s_{min}(y)$ = +¥, $y \in A \setminus P(C)$.

Минимальные затраты на стимулирование являются чрезвычайно важным понятием. Их анализ позволяет решать задачу синтеза оптимальной функции стимулирования, изучать свойства оптимального решения и т.д. [61, 62]. Обозначим максимальную в классе $M_i \subseteq M$ эффективность управления $K_{Mi} = \max\limits_{s \in M_i} K(s)$, $i = 1, 2$.

<u>Теорема 8</u> [46, 61]. Пусть $M_1 \subseteq M$, $M_2 \subseteq M$ - два класса допустимых систем стимулирования и выполнено: $\forall\, y \in A$ $s_{min1}(y) \leq s_{min2}(y)$. Тогда $K_{M1} \geq K_{M2}$.

Таким образом, эффективность стимулирования может быть определена и через минимальные затраты на стимулирование, причем имеет место (ср. с выражением (37)):

(45) $K_M = \max\limits_{y \in A} \{H(y) - s_{min}(y)\}$,

то есть анализ минимальных затрат на стимулирование является одним из эффективных методов решения задачи стимулирования, которым мы неоднократно будем пользоваться в ходе дальнейшего изложения.

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим задачу стимулирования в ОС, в которой[1] $H(y) = y$, $c(y) = y^2/2r$, где $r > 0$ - параметр функции затрат агента. Из выражений (34)-(41) следует, что в данном случае

$$y^+(C) = \sqrt{2rC}\,,\ y^*(C) = \begin{cases} r, & \text{при } r \le y^+(C) \\ y^+(C), & \text{при } r \ge y^+(C) \end{cases},$$

$$K_1(C) = min\ \{r/2,\ \sqrt{2rC}\,/2\},$$

причем оптимальный размер ограничения C механизма стимулирования, который может трактоваться как максимальная величина *фонда заработной платы* (ФЗП), равен $r/2$ (что позволяет сделать интересный с содержательной точки зрения вывод – увеличение ФЗП свыше этой величины нецелесообразно).

Если центр использует принцип МГР и $y^* = y^+(C)$, то, фиксируя произвольное (сколь угодно малое!) $e > 0$ и выбирая $y_e = y^* - e$, при использовании системы стимулирования

$$s_e(y) = \begin{cases} C, & y = y_e \\ 0, & y \ne y_e \end{cases}$$

центр реализует единственное действие агента – y_e. Очевидно, имеет место $K_g(s_e) = y^* - e - C$ и $K_1(C) = y^* - C$, то есть разность между эффективностью и гарантированной эффективностью управлений s^* и s_e сколь угодно мала (равна e). •

---

[1] *Как отмечалось выше, составляющие целевых функций участников ОС измеряются в одних и тех же единицах, поэтому заменой переменных (и соответствующим изменением допустимых множеств) иногда возможно "линеаризовать" одну из функций – в рассматриваемом примере линейной считается функция дохода центра.*

Таким образом, в настоящем подразделе мы привели (точнее – в основном описали известные из литературы результаты) полное решение задачи управления в базовой модели ОС РК, то есть в модели РК1. Перейдем к систематическому[1] исследованию расширений базовой модели.

[1] *Понятно, что так как модель РК12 является наиболее общей из 16-ти базовых моделей (см. раздел 1), то, исследовав ее, мы автоматически получили бы решения задач управления для всех частных моделей. Однако при таком подходе оказывается, что результаты получаются слишком громоздкими (см. ниже) по сравнению с реализуемым индуктивным подходом, учитывающим специфику той или иной модели по сравнению с моделями предыдущего уровня сложности.*

2.2. Модели первого уровня сложности

Рассмотрим класс моделей ОС РК первого уровня сложности, отличающихся от базовой модели РК1 наличием одного и только одного из присущих ОС с распределенным контролем характерных признаков: либо векторного множества допустимых действий агента (модель РК5), либо векторной целевой функции агента (модель РК13), либо нескольких центров (модель РК3), либо векторных управлений (модель РК2). Так как специфика ОС РК впервые проявляется именно при переходе от базовой модели к классу моделей первого уровня сложности, рассматривать этот класс моделей мы будем относительно подробно с тем, чтобы при исследовании классов моделей более высоких уровней сложности иметь возможность адаптированно использовать комбинации приведенных в настоящем разделе результатов.

2.2.1. Модель РК2

Отличие модели РК2 от модели РК1 заключается в наличии векторных управлений центра, предпочтительность которых оценивается агентом по значениям скалярной функции полезности (напомним, что во всех моделях, рассматриваемых в настоящей работе, целевая функция центра считается скалярной), то есть $S_{РК2} = \{n_A = 1, f, k = 1, \vec{u}\}$.

Все общие результаты, описанные в разделе 2.1 для модели РК1, остаются в силе и для модели РК2 (напомним, что предположение А.1 заключалось в частности только в компактности допустимых множеств, размерность которых не оговаривалась). Следовательно, решение задачи синтеза оптимальных (гарантированно ε-оптимальных) управлений для модели РК2 дается теоремой 2 (соответственно - теоремой 1).

Для задач стимулирования векторное управление в модели РК2 соответствует нескольким поощрениям за одни и те же показатели деятельности, то есть $\vec{s}(y) = (s_1(y), s_2(y), \dots, s_{n_u}(y)), y \in A$.

При этом суммарные затраты на стимулирование $u(y)$ определяются следующим образом:

$$(1)\quad u(y) = \sum_{i=1}^{n_u} \sigma_i(y),$$

а целевые функции центра и агента могут быть записаны соответственно в виде: $W(\vec{\sigma}, y) = H(y) - u(y)$, $w(\vec{\sigma}, y) = u(y) - c(y)$, то есть задача стимулирования в модели РК2 заменой (1) полностью сводится (естественно, с учетом ограничений на суммарное стимулирование, порождаемых требованием $\vec{\sigma} \in U$) к задаче стимулирования в базовой модели РК1, решение которой дается теоремами 2 и 7.

2.2.2. Модель РК3

Отличие модели РК3 от модели РК1 заключается в наличии нескольких управляющих органов, каждый из которых вырабатывает собственное управляющее воздействие, то есть $S_{РК3} = \{n_A = 1, f, k \geq 2, u\}$. Обозначим $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ - множество центров[1].

Содержательно модель РК3 соответствует, например, матричной структуре управления ОС, в которой имеются несколько управляющих органов, оценивающих скалярное действие агента каждый по своему критерию. Например, деятельность агента может описываться объемом выпускаемой им продукции и оцениваться управляющими органами по различным критериям, например, экономическая эффективность, социальная значимость, влияние на окружающую среду и т.д.

Обозначим $u^i \in U^i$ - управление, выбранное i-ым центром[2], $i \in K$, $\vec{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^k)$. Так как целевая функция и множество

---

[1] *Выше символ "K" был введен для обозначения эффективности $K(u)$ управления $u \in U$, в моделях же ОС с несколькими центрами этот же символ традиционно используется для обозначения множества центров. Можно надеяться, что такая не очень удачная, но исторически сложившаяся система обозначений не приведет к путанице.*

[2] *Условимся, что верхние индексы нумеруют центры.*

допустимых действий агента скалярны, а также скалярно (с точки зрения агента) управление u (также как это имеет место и в базовой модели РК1), то предположим, что это скалярное управление является известной участникам ОС функцией $F(\cdot)$ от управлений, выбранных центрами, то есть $u = F(\vec{u})$, $u \in U = \{u \mid u = F(\vec{u}),\ u^i \in U^i,\ i \in K\}$.

Пусть информированность участников стандартная (см. определение выше), а последовательность функционирования следующая: центры одновременно и независимо (коалиционные эффекты в настоящей работе не рассматриваются) выбирают свои управления $\{u^i\}$, что приводит к реализации управления $u = F(\vec{u})$; далее агент при известном ему управлении $u \in U$ выбирает свое действие $y \in A$, что однозначно определяет выигрыши участников ОС.

Пусть $y(\vec{u})$ - известная центрам зависимость действия, выбираемого агентом, от управлений, назначенных центрами. Тогда вектор $\vec{u}_N$ является *равновесием Нэша* тогда и только тогда, когда выполнено: $\forall\ i \in K,\ \forall\ u^i \in U^i$

(1) $F^i(\vec{u}_N, y(\vec{u}_N)) \geq F^i(u_N^{-i}, u^i, y(u_N^{-i}, u^i))$,

где $u_N^{-i} = (u_N^1, u_N^2, \ldots, u_N^{i-1}, u_N^{i+1}, \ldots, u_N^k)$ - обстановка игры центров для i-го центра, $i \in K$.

Относительно целевых функций центров $\{F^i(\vec{u}, y)\}$ введем следующее предположение.

А.3. Целевая функция i-го центра $F^i(u^i, y)$ зависит явным образом только от соответствующего управления и действия агента и непрерывна на компакте $U^i \times A$, $i \in K$.

Таким образом, в модели РК3 имеют место две "игры" - *игра между центрами*[1] (на этапе определения управлений) и "игра", в которой агент выбирает свою стратегию[1].

---

[1] *Казалось бы, явного взаимодействия между центрами быть не должно, так как в силу предположения А.3 в целевую функцию каждого центра не входят (по крайней мере явным образом) стратегии других центров. Однако зависимость между центрами существует, так как в целевую функцию каждого центра входит действие агента $y(\vec{u})$, конкретное значение которого в силу гипотезы рационального поведения агента зависит в общем случае от стратегий всех центров.*

Обсудим что следует понимать под действием агента, выбираемым им при заданных управлениях со стороны центров, то есть какие значения в рамках гипотезы рационального поведения агента может принимать $y(\vec{u})$.

Множество реализуемых управлением $u \in U$ действий агента имеет вид:

(2) $P(u) = Arg \max\limits_{y \in A} f(u, y)$.

Подставляя $u = F(\vec{u})$ в определение (2), получаем:

(3) $P(\vec{u}) = Arg \max\limits_{y \in A} f(F(\vec{u}), y)$.

Как и в базовой модели, после определения множества реализуемых действий следует оговорить что понимается под рациональным выбором агента, на который рассчитывают центры, в случае, когда множество $P(\vec{u})$ содержит более одного элемента. В модели РК1 использовались два предельных подхода - ГБ и принцип МГР. В рассматриваемой модели число возможных подходов к определению рационального выбора агента еще более разнообразно. Приведем некоторые из них.

Первый подход – предположение об использовании каждым из центров принципа МГР, то есть расчет на выбор агентом наихудшего (с точки зрения данного центра) действия из множества $P(\vec{u})$. Обозначим это действие

(4) $y^i_{\text{МГР}}(\vec{u}) = arg \min\limits_{y \in P(\vec{u})} F^i(u^i, y), i \in K$.

Непосредственное обобщение другого предельного подхода - гипотезы благожелательности - на случай нескольких центров невозможно [72, 73], так как в общем случае не существует действия агента, принадлежащего множеству $P(\vec{u})$, которое одновременно максимизировало бы целевые функции всех центров. Поэтому обозначим $Par(B, \vec{u}, \{F^i\})$ - множество недоминируемых по Парето (при критериях $\{F^i\}$ центров) элементов множества $B \subseteq A$:

---

[1] *Вторая "игра" становится полноценной игрой в случае нескольких связанных агентов (см. подробное описание результатов исследования моделей многоэлементных ОС в [63]).*

$$(5)\ Par(B, \vec{u}, \{F^i\}) = \{y \in B \mid \forall\, y' \in B\ (F^i(u^i, y') \geq F(u^i, y),$$

$$i \in K) \to F^i(u^i, y') = F(u^i, y)\}.$$

Представляется естественным считать (что мы и будем делать в ходе дальнейшего изложения при рассмотрении ГБ в моделях ОС РК с несколькими центрами) *обобщением ГБ* следующее предположение: агент выбирает из множества $P(\vec{u})$ действия, как минимум, неулучшаемые одновременно с точки зрения всех центров.

Рассчитывая на гарантированный результат по множеству Парето, i-ый центр вычисляет действие

$$(6)\ y^i_{Par\text{МГР}}(\vec{u}) = arg \min_{y \in Par(P(\vec{u}),\, \vec{u},\, \{\Phi^i\})} F^i(u^i, y),\ i \in K.$$

Аналогично, i-ый центр может надеяться на благожелательное отношение агента именно к нему, в случае, если агент не может одновременно улучшить значения целевых функций всех центров, то есть, рассчитывать на выбор действия

$$(7)\ y^i_{Par\text{ГБ}}(\vec{u}) = arg \max_{y \in Par(P(\vec{u}),\, \vec{u},\, \{\Phi^i\})} F^i(u^i, y),\ i \in K.$$

И, наконец, четвертым (но, естественно, не исчерпывающим все возможные подходы) вариантом является использование i-ым центром гипотезы "абсолютной благожелательности", в рамках которой центр рассчитывает, что агент выберет из множества $P(\vec{u})$ действие, наилучшее именно с его точки зрения:

$$(8)\ y^i_{\text{ГБ}}(\vec{u}) = arg \max_{y \in P(\vec{u})} F^i(u^i, y),\ i \in K.$$

Так как[1] $Arg \max_{y \in P(\vec{u})} F^i(u^i, y) \subseteq Par(P(\vec{u}), \vec{u}, \{F^i\}) \subseteq P(\vec{u})$, $i \in K$, то введенные величины удовлетворяют следующему соотношению:

$$F^i(u^i,\ y^i_{\text{ГБ}}(\vec{u})) = F^i(u^i,\ y^i_{Par\text{ГБ}}(\vec{u})) \geq$$

$$\geq F^i(u^i,\ y^i_{Par\text{МГР}}(\vec{u})) \geq F^i(u^i,\ y^i_{\text{МГР}}(\vec{u})).$$

---

[1] *Легко видеть, что в рамках введенных предположений множество $Par(B, \{F^i\})$ заведомо включает в себя точки, на которых достигаются максимумы целевых функции центров $\{F^i\}$ по множеству B.*

Обсудив возможные определения рационального выбора $y(\vec{u})$ агента при заданных управлениях, перейдем к описанию игры центров. Пусть $y^i(\vec{u}) \in A$ - представления i-го центра о выборе агента при управлении u, $i \in K$ (возможные значения $y^i(\vec{u})$ - $y^i_{ГБ}(\vec{u})$, $y^i_{ParМГР}(\vec{u})$, $y^i_{МГР}(\vec{u})$ и т.д.).

Вектор управлений $\vec{u}_N = (u_N^1, u_N^2, \ldots, u_N^k)$ является *равновесием Нэша* тогда и только тогда (см. (1) и предположение А.3), когда $\forall\ i \in K$, $\forall\ u^i \in U^i$

(9) $F^i(u_N^i, y^i(\vec{u}_N)) \geq F^i(u^i, y^i(u_N^{-i}, u^i))$.

Множество равновесий Нэша обозначим E_N.

Таким образом, **характерной особенностью ОС РК является наличие игры центров**. Исследуем свойства решений этой игры на примере задачи стимулирования.

В задаче стимулирования в модели РК3 скалярное управление $u \in U$ определяется по управлениям центров следующим образом (напомним, что величина $u(y)$ в модели РК1 называлась суммарными затратами центра на стимулирование):

(10) $\hat{u}(y) = u(y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y)$.

Если в модели РК2 замена типа (10) позволяла свести задачу стимулирования к известной (то есть к задаче стимулирования в модели РК1, решение которой описано в разделе 2.1), то подобный переход в модели РК3 невозможен, так как в ней имеются $k \geq 2$ центров с целевыми функциями[1]

(11) $W^i(\sigma^i, y) = H^i(y) - \sigma^i(y)$, $i \in K$.

Целевая функция агента имеет вид:

(12) $w(\sigma, y) = u(y) - c(y)$.

---

[1] *Отметим, что модель РК3 качественно эквивалентна модификации модели РК1 или РК2, в которой единственный центр имеет векторные предпочтения на множестве $U \times A$ (см. также обсуждение взаимосвязи модели РК5 с векторными предпочтениями агента и моделей многоэлементных ОС с агентами, имеющими скалярные предпочтения). Именно по этой причине в настоящей работе рассматриваются управляющие органы со скалярными предпочтениями.*

Для задачи стимулирования с целевой функцией агента вида (12) в рамках предположения А.2 доказано (см. раздел 2.1 и [61, 62]), что при использовании компенсаторной системы стимулирования

(13) $u(y) = s_K(y) = \begin{cases} c(y^*), \ y = y^* \\ 0, \quad\quad y \neq y^* \end{cases}$

в рамках ГБ агент выберет действие y^*. Следовательно, минимальные суммарные затраты центров на стимулирование по реализации действия y Î A равны (точнее - при отказе от ГБ сколь угодно близки к) соответствующим затратам агента, то есть

(14) $u_{min}(y) = c(y)$.

Из этого следует, что при использовании центрами управлений, удовлетворяющих (13), в рамках предположения А.2 выбор агента однозначен (см. теорему 4) и совпадает с y^* Î A, поэтому будем считать, что $y^i(\vec{u}) = y^*$, i Î K.

Свойства стратегий центров в задаче стимулирования определяются следующей леммой.

Лемма 9. Пусть выполнены предположения А.1-А.3 и ГБ. Тогда в задаче стимулирования для любого вектора $\vec{s}$ стратегий центров, реализующего действие y^* Î A агента (y^* Î $P(\vec{s}\,)$), существует недоминируемый им по Парето вектор стратегий центров $\vec{s}^{\,*}$, который реализует то же действие агента и имеет вид:

(15) $s^{*i}(\vec{l}, y) = \begin{cases} l^i, \ y = y^* \\ 0, \ \ y \neq y^* \end{cases}, i$ Î K,

где величины $\{l^i\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(16) l^i ³ 0, i Î K; $\sum_{i \in K} l_i = c(y^*)$.

Доказательство. Пусть y^* Î $P(\vec{s}\,)$. Из определения реализуемости действия y^* Î A следует, что

(17) " y Î A $\sum_{i \in K} s^i(y^*) - c(y^*)$ ³ $\sum_{i \in K} s^i(y) - c(y)$.

Переход от системы стимулирования $\vec{s}$ к системе стимулирования (15), в которой, например, $l^i = s^i(y^*)$, i Î K, оставляет в силе условие (17), следовательно действие y^* может быть реализовано стратегиями типа (15).

Докажем выполнение (16). Неотрицательность стимулирования в (15) следует из предположения А.2, поэтому необходимо показать, что имеет место $\sum_{i \in K} \lambda_i = c(y^*)$. Из определения реализуемости следует, что при использовании системы стимулирования (15) выполнено

$$\forall y \in A \quad \sum_{i \in K} \sigma^*_i(y^*) - c(y^*) \geq \sum_{i \in K} \sigma^*_i(y) - c(y),$$

то есть $y \in P(\vec{\sigma}^*)$.

Правая часть последнего выражения в силу (15) и предположения А.2 достигает максимума при $y = 0$, следовательно:

(18) $\sum_{i \in K} \sigma^*_i(y^*) \geq c(y^*)$.

Если неравенство (18) выполнено как строгое, то всегда найдется такой номер $i \in K$, что выбор i-ым центром параметра $\gamma^i < \lambda^i$ в стратегии типа (15) оставит в силе условие реализуемости и строго увеличит значение его целевой функции при неизменных стратегиях и значениях целевых функций остальных центров, что противоречит определению эффективности по Парето. •

Если выполнено предположение А.2' (см. выше), то существует функция $c^{-1}(\cdot)$, обратная к функции затрат агента, и равенство в условии (16) можно записать в виде

(19) $y(\vec{\lambda}) = c^{-1}(\sum_{i \in K} \lambda_i)$.

Лемма 9 позволяет в ряде случаев (см. теорему 10) при исследовании задачи стимулирования в ОС с несколькими центрами (для решения которой необходимо искать k функций стимулирования и реализуемое ими действие) без потери эффективности ограничиться задачей поиска $(k+1)$-го скалярного параметра, то есть k чисел $\{\lambda^i\}$ и реализуемого действия y^*.

Итак, лемма 9 описывает вектора стратегий центров, реализующих те или иные действия агента, но ничего не говорит о том являются ли эти вектора равновесиями в игре центров, единственно ли равновесие и как его искать. Для ответа на эти вопросы запишем определение равновесия Нэша в рамках предположения об использовании центрами стратегий типа (15), используя (16) и (19): $\vec{\lambda}$ - равновесие Нэша тогда и только тогда, когда

(20) $\forall\ i \in K\ \forall\ \gamma^i \geq 0\ \ H^i(y(\lambda^{-i}, \lambda^i)) - \lambda^i \geq H^i(y(\lambda^{-i}, \gamma^i)) - \gamma^i$.

Пусть действие агента $y^* \in A$ реализуется системой стимулирования[1]

(21) $\sigma^i(\vec{\lambda}, y) = \begin{cases} \lambda^i, & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases},\ i \in K.$

Запишем для задачи стимулирования определение равновесия Нэша (9) в игре центров следующим образом:

(22) $\forall\ i \in K\ \forall\ \gamma^i \geq 0\ \ H^i(y^i) - \gamma^i \leq H^i(y^*) - \lambda^i$,

где $y^* \in P(\vec{\lambda})$, $y^i \in P(\lambda^{-i}, \gamma^i)$, то есть

(23) $\forall\ i \in K\ \forall\ \gamma^i \geq 0,\ \forall\ y^i \in P(\lambda^{-i}, \gamma^i)\quad \gamma^i - c(y^i) \geq \sum_{i \in K} \lambda^i - c(y^*)$.

Условия (22), (23) означают, что ни один из центров, отклоняясь по-одиночке от равновесия Нэша и побуждая агента использованием системы стимулирования $\sigma^i(y) = \begin{cases} \gamma^i, & y = y(\lambda^{-i}, \gamma^i) \\ 0, & y \neq y(\lambda^{-i}, \gamma^i) \end{cases}$ выбрать действие y^i, быть может отличное от действия y^* (см. условие (23)), не выигрывает от этого (условие (22)).

Из условий реализуемости (17) следует, что условие

(24) $\sum_{i \in K} \lambda^i = c(y^*)$

является необходимым условием равновесия по Нэшу системы стимулирования (21) - в противном случая, уменьшая по-одиночке выплаты агенту, любой из центров может только выиграть.

Итак, мы имеем необходимое условие равновесия Нэша (24), и необходимое условие реализуемости[2] (18). Требование их одновре-

---

[1] *Отметим, что скалярное управление при этом определяется выражением (10), в котором управления центров - суть системы стимулирования (21).*

[2] *Равновесиями Нэша будут также все системы стимулирования, при которых центры реализуют действие y*, и предлагают достаточно малое вознаграждение за выбор других действий. Эти равновесия инте-*

менного выполнения сводится к (24). Значит правая часть в (23) равна нулю и условия реализуемости действия y^i можно записать в виде

(25) $g^i \geq c(y^i)$, $i \in K$.

Обозначим

(26) $W^i_{\max} = \max\limits_{y \in A} \{H^i(y) - c(y)\}$, $i \in K$,

(27) $y^i_{\max} = arg \max\limits_{y \in A} \{H^i(y) - c(y)\}$, $i \in K$.

Объединяя (22) и (25) получаем с учетом (26) и (27) следующий результат.

Теорема 10. Решение игры центров в задаче стимулирования при использовании ими стратегий типа (21) определяется выражениями (24) и

(28) $H^i(y^*) - \lambda^i \geq W^i_{\max}$, $i \in K$.

Отметим, во-первых, что результат теоремы 10 охватывает и те ситуации, в которых определенное действие агента реализуется некоторой "коалицией" центров $S \subseteq K$, а центры, не вошедшие в "коалицию", не принимают участия в компенсации затрат. В этом случае в неравенствах (27) $\lambda_i = 0$, $i \in K \setminus S$. Если существует решение соответствующей системы неравенств для "коалиции" и ее дополнения, то, очевидно, существует решение системы неравенств (27).

Во-вторых, утверждение теоремы 10 характеризует равновесия Нэша на множестве стратегий центров типа (21). Если хотя бы один

реса не представляют, но они есть. Кроме того, если стратегии центров имеют вид (21), то такая реализация требует совместных действий центров. При стратегиях вида (21) имеем задачу коллективного благосостояния [54, 79], где сообщество центров выбирает действие y и распределение затрат на его реализацию (при этом (28) является условием индивидуальной рациональности и нахождение достаточно узкого решения требует применения гипотез типа утилитаризма или эгалитаризма [54]). При k > 2 и разрешении образовывать коалиции имеем кооперативную игру. Найденное множество равновесий Нэша – это на самом деле ядро для игры двух лиц или ядро (если оно непусто) в игре, в которой разрешена только максимальная коалиция.*

из центров устанавливает ненулевое вознаграждение агента за выбор им действия, отличного от y^*, то необходимо доопределение множества равновесий Нэша, например, за счет использования так называемых условий угроз (см. [13-15, 63, 76] и лемму 11) и т.д.

Содержательно условие (24) обеспечивает реализуемость действия y^* (см. лемму 9), условие (21) обеспечивает эффективность по Парето (и является необходимым условием равновесия Нэша) стратегий центров (см. лемму 9), а условие (28) гарантирует, что ни одному из центров не выгодно отклоняться от равновесия Нэша, побуждая агента выбирать действие, отличное от y^*, и в одиночку компенсировать его затраты (отметим, что из (24) содержательно следует, что центры "скидываются" и совместно компенсируют затраты агента).

Необходимо подчеркнуть, что при предельном переходе от модели РК3 к базовой модели РК1 теорема 10 переходит в теорему 8 (если $k = 1$, то единственный центр компенсирует затраты агента, побуждая его выбирать действие, максимизирующее разность между доходом центра и его затратами на стимулирование, равными затратам агента (при этом (28) обращается в равенство)).

Если выполнено предположение А.2', то (24) и (28) могут быть объединены (воспользовавшись (19), можно исключить из условий, определяющих равновесные стратегии центров, действие агента) в следующую систему неравенств:

(29) $H^i(c^{-1}(\sum_{i \in K} l^i)) - l^i \geq W^i_{\max}, \ i \in K.$

Условие типа (29) можно записать в виде ($j \in K$):

$$(30)\quad \begin{cases} H^i(y^*) - l^i \geq W^i_{\max}, \ i \in K \setminus \{j\} \\ H^j(y^*) - c(y) + \sum_{i \neq j} l^i \geq W^j_{\max} \end{cases},$$

исключив из (28) подстановкой (24) одно из значений стимулирования (l_j) и оставив действие агента y^*.

Пусть L - множество векторов $\vec{l} \ge 0$, удовлетворяющих (24), (28) при всевозможных $y^* \in A$. Обозначим множество действий агента, реализуемых равновесными по Нэшу стратегиями центров[1]

(31) $P^K = \{y \in A \mid \exists\ \vec{l} \ge 0$: (24), (28)$\}$,

то есть множество таких действий агента, для которых система неравенств (24), (28) имеет решение.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий свойства введенных величин и соотношений между ними.

Пример 2. Пусть имеет место совпадение интересов центров, то есть они стремятся реализовать максимально возможное действие агента. Тогда вопрос заключается в определении множества допустимых распределений затрат агента между центрами. Рассмотрим ОС, в которой $c(y) = y$, $H^i(y) = a^i\, y$, $a^i \ge 1$, $i \in K$, $k = 2$ и $A = [0; A^+]$, $A^+ < +\infty$. Тогда $y^i_{\max} = A^+$, $i \in K$, а система неравенств (29) может быть записана в виде $\begin{cases} a^1(l^1 + l^2) - l^1 \ge (a^1 - 1)A^+ \\ a^2(l^1 + l^2) - l^2 \ge (a^2 - 1)A^+ \end{cases}$.

Множество L равновесных по Нэшу стратегий центров заштриховано на рисунке 7. •

Таким образом, теорема 10 дает характеризацию множества равновесий Нэша в игре центров. Однако, это множество может оказаться достаточно большим (см. в качестве иллюстрации этого утверждения пример 2), поэтому необходимо дополнительное исследование его свойств. Рассмотрим несколько примеров.

Очевидно, что имеет место: $Par(P^K, \{W^i\}) = P^K \cup \bigcup_{j \in K} \{y^j_{\max}\}$

(то, что все точки множества P^K не доминируют друг друга по Парето следует из леммы 9 и теоремы 10; кроме того, множество Парето содержит точки максимумов каждого из критериев). Содержательно любое равновесие Нэша в игре центров, определяемое теоремой 10, не доминируется по Парето ни одним другим равновесием и, кроме того, реализуемыми являются такие (но в общем

---

[1] *Из (29) следует, что в рамках предположения А.2' максимальное множество реализуемых действий есть* $P^K = \bigcup_{\vec{l} \in \Lambda} c^{-1}\left(\sum_{i \in K} l^i\right)$.

случае не только такие) действия агента, которые доставляют максимум хотя бы одной из функций:

$$W^i(l^i, y) = H^i(y^i) - c(y),\ i \in K$$

(отметим, что при этом не обязательно стратегии типа (21), реализующие это действие, будут равновесными по Нэшу - см. следствие 12), что иногда значительно упрощает поиск и исследование равновесий в игре центров.

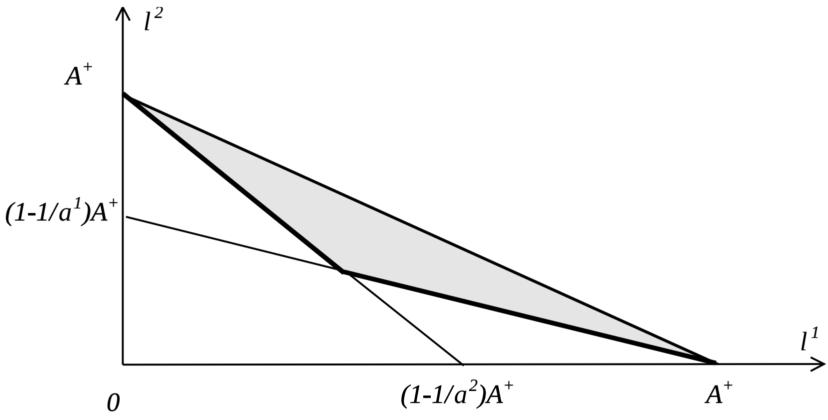

Рис. 7. Равновесные по Нэшу стратегии центров в примере 2

Исследуем случай, когда множество L пусто, то есть когда не существует равновесных по Нэшу стратегий центров типа (21).

В доказательстве леммы 9 установлен тот факт, что для любого вектора стратегий центров, реализующих действие $y^* \in A$ агента, можно построить стратегию (15), реализующую то же действие агента, но этот вектор стратегий не обязательно является равновесием Нэша, например, в случае, когда $L = \varnothing$ и, следовательно, (16) не имеет места. Следующая лемма характеризует равновесные по Нэшу стратегии центров для этого случая.

Упорядочим центры в порядке убывания величин $W^i_{\max}$, $i \in K$, относительно которых не снижая общности будем считать, что все они различны. Первого в этом упорядочении центра назовем *диктатором*. Если равновесия Нэша (при использовании центрами Парето эффективных стратегий типа (21)) не существует, то необходимо ослабление концепции равновесия для того, чтобы иметь возможность определить решение игры (см. для примера соревновательные системы стимулирования [13, 23, 63, 76]). Одним из возможных путей является использование "условий угроз", в соответствии с которыми решением игры считается такая обстановка игры, при который каждый из игроков уверен, что ни один из других игроков не может угрожать ему изменением своей стратегии (понятно, что если равновесие Нэша существует, то оно удовлетворяет этим условиям).

<u>Лемма 11.</u> Если множество L пусто, то равновесные[1] стратегии центров удовлетворяют следующим условиям:

(32) $s^{*i}(\vec{l}, y) = \begin{cases} l^i, \ y = y^{*_i} \\ 0, \ \ y \neq y^{*_i} \end{cases}, \ i \in K,$

(33) $y^* = y^{*1}$,

где

(34) $l^1 = c(y^1_{\max}) + W^2_{\max} + e, y^{*1} = y^1_{\max}$,

а y^{*i}, l^i и e - любые, удовлетворяющие следующим условиям:

(35) $y^{*i} \in A, \ l^i \in [0; H^i(y^{*i})], \ i = \overline{2,k}, \ e \in (0; W^1_{\max} - W^2_{\max}]$.

Доказательство. Ограничимся тезисным изложением основных пунктов доказательства. Если множество L пусто, то под равновесием в игре центров будем понимать такой вектор стратегий, что каждый из центров может быть уверен, что ни один из других центров не сможет, изменяя свою стратегию, реализовать другое действие агента ("условие угроз" - см. [63]).

Какое действие ни пытался бы реализовать любой из k-1 центров (за исключением диктатора), диктатор всегда сможет предложить агенту большую оплату за выбор наиболее выгодного для него действия $y^1_{\max}$.

---

[1] *Равновесие понимается в смысле "условий угроз" [63] при минимальном e. Кроме того, если второй центр предлагает агенту выплаты $W^2_{\max}$ в случае выбора им действия $y^2_{\max}$, то получаем, что выражения (32)-(35) будут задавать слабое e-равновесие Нэша.*

Для удовлетворения "условию угроз" диктатору достаточно оплатить агенту, помимо компенсации затрат, величину строго превышающую (на $e > 0$) ту доплату (опять-же по сравнению с компенсацией затрат), которую ему могут предложить другие центры. Максимум из этих доплат равен $W_{\max}^2$. •

Отметим, во-первых, что можно расширить множество равновесных стратегий центров в условиях леммы 11, предположив, что соревноваться могут произвольные коалиции центров, и определять равновесие, записывая неравенства типа (32)-(35) уже для коалиций. Однако, при этом приходится вводить дополнительные предположения об информированности центров и их возможностях обмениваться информацией и предпринимать согласованные действия. Получающаяся в результате игра может рассматриваться либо как игра с «равновесием Нэша», либо как кооперативная игра с нетрансферабельной полезностью [68, 69, 86]. Так как исследование коалиционных эффектов выходит за рамки настоящей работы, то в ходе дальнейшего изложения под равновесием в игре центров будем понимать равновесия, определяемые теоремой 10 и леммой 11.

Во-вторых, при предельном переходе от модели с несколькими центрами (модель РК13) к модели с одним центром (модель РК1), который, естественно, и является диктатором, система стимулирования (32)-(35) переходит в оптимальную квазикомпенсаторную систему стимулирования (см. теорему 7). Таким образом, при предельном переходе в случае непустого множества L эффективность стимулирования в модели РК13 стремится к эффективности стимулирования в соответствующей модели РК1 "сверху", а в случае пустого множества L - "снизу".

Пример 3. Рассмотрим ОС, в которой интересы центров противоположны. Пусть $k = 2$, $c(y) = y^2$, $H^1(y) = b - a^1 y$, $H^2(y) = a^2 y$, то есть первый центр заинтересован в выборе агентом минимального (нулевого) действия, а второй центр - некоторого действия, отличного от нуля (см. рисунок 8).

Вычислим следующие величины: $y^1_{\max} = 0$, $y^2_{\max} = a^2/2$, $W^1_{\max} = b$, $W^2_{\max} = (a^2)^2/4$. Условия (22) примут вид:

$$\begin{cases} l^1 + a_1\sqrt{l^1 + l^2} \le 0 \\ a^2\sqrt{l^1 + l^2} - l^2 \ge (a^2)^2 / 4 \end{cases}.$$

В силу неотрицательности выплат от центров агенту последняя система неравенств не имеет решения, то есть L = Æ. Следовательно, не существует равновесия Нэша типа (21) в игре центров, реализующего действия агента с минимальными затратами, то есть условие (24) не выполнено.

Следовательно, в соответствии с леммой 11, если b £ $(a^2)^2/4$, то первый (в рамках обозначений настоящего примера) центр является диктатором и реализует нулевое действие, выплачивая агенту вознаграждение $(a^2)^2/4 + e$. Если же выполнено b ³ $(a^2)^2/4$, то диктатором является второй центр, который в этом случае реализует действие $a^2/2$, выплачивая агенту вознаграждение $b + e$. •

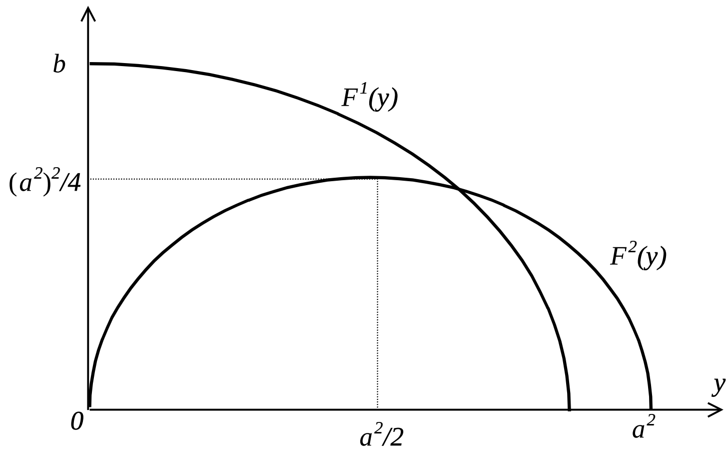

Рис. 8. Целевые функции центров в примере 3

Полная характеризация (в оговоренном выше смысле, то есть без учета коалиционных эффектов) равновесных (либо по Нэшу в случае непустоты множества L, либо относительно «условий угроз»стратегий центров дается следствием 12, объединяющим результаты лемм 9 и 11, а также теоремы 10.

<u>Следствие 12.</u> Если L ¹ Æ, то множество равновесий в игре центров определяется выражениями (21), (24) и (28); если L = Æ, то множество равновесий в игре центров определяется выражениями (32)-(35).

Содержательно, в игре центров имеются два режима - режим сотрудничества и режим конкуренции.

Режим сотрудничества имеет место когда множество L не пусто (для этого интересы центров должны различаться не очень сильно). При этом центры совместно компенсируют затраты агента (множество недоминирующих друг друга по Парето допустимых дележей затрат при этом может оказаться достаточно широким) и получают полезность, превышающую полезность, получаемую каждым из них в случае индивидуального управления агентом (см. модель РК1).

Режим конкуренции появляется когда множество L пусто (для этого интересы центров должны быть почти антагонистичны). При этом один из центров (содержательно - обладающий наибольшими ресурсами управления) единолично не только компенсирует затраты агента, но и переплачивает ему ровно столько, чтобы обезопасить себя от возможности соглашения агента на другие (более выгодные для него) условия, которые может предложить любой другой центр. Интересно отметить, что режим конкуренции невыгоден ни одному из центров (даже диктатору, который "переплачивает" агенту $\Phi^2_{\max} + e$), так как любая точка из множества L (если оно непусто) доминирует его Парето. Тем не менее этот режим является "равновесным", то есть при сильно различающихся интересах и отсутствии возможности согласовать свои действия (напомним, что мы рассматриваем некооперативное взаимодействие центров) неэффективная ситуация является единственной ситуацией, устойчивой относительно индивидуальных отклонений.

Следует отметить, что результат следствия 12 описывает достаточно широкий круг прикладных задач, включающий в том числе и задачу стимулирования в ОС РК, для которой первоначально эта модель и разрабатывалась. Примером может служить задача найма на работу (см. модели рекрутинга и формирования состава ОС в [47, 63]).

Представим себе следующую ситуацию: пусть имеются один агент, ищущий работу, и k центров - потенциальных работодателей. Не имея возможности (по информационным, нормативным и пр. причинам) договориться о сотрудничестве (никто из работодателей не будет оплачивать работу агента на другого работодателя), центры попадают в режим конкуренции, то есть конкурируют за привлечение агента. В соответствии с результатом леммы 11 величина $W_{\max}^{i}$ характеризует максимально возможную эффективность найма агента i-ым центром, поэтому без учета информационных и транзакционных издержек агент примет предложение того центра, который сможет наиболее эффективно использовать результаты его деятельности. Величина $W_{\max}^{2}$ (аукционное решение - см. выше) характеризует ту доплату, которую получает агент сверх компенсации своих затрат за счет имеющейся на рынке труда конкуренции.

Аналогично может рассматриваться конкуренция между агентами (см. модели многоэлементных ОС в [63]) при найме их на работу единственным центром, и в общем случае - конкуренция между центрами с одной стороны и агентами с другой стороны. Поэтому можно констатировать, что полученные результаты позволяют формулировать и исследовать не только задачи стимулирования в ОС с фиксированным составом, но и модели рынка труда.

Выше мы привели два примера, иллюстрирующих предельные случаи - полного совпадения (пример 2) и полного антагонизма (пример 3) интересов центров. При этом оказалось, что в первом случае *L* ¹ *Æ* и существует достаточно широкая область сотрудничества центров, во втором случае область сотрудничества пуста (*L* = *Æ*) и в соответствии с леммой 11 имеет место конкуренция между центрами. В приводимом ниже примере интересы центров не антагонистичны, но и не полностью совпадают, что приводит к возможности обсуждения различных подходов к описанию их поведения в процессе сотрудничества.

<u>Пример 4.</u> Пусть $k = 2$, $c(y) = y$, $H^i(y) = y - y^2/2r^i$, *i* Î *K*. Вычисляем $y_{\max}^{i} = 0$, *i* Î *K*, то есть затраты агента настолько велики по

сравнению с доходом каждого из центров, что деятельность агента (выбор им ненулевых действий) невыгодна ни одному из центров при условии, что они управляют агентом по-одиночке (отметим, что в этом примере мы нарушаем предположение А.2, требующее монотонного возрастания функции дохода центра).

Введем функцию "дохода центров", определяемую как сумма их индивидуальных доходов:

(36) $H(y) = \sum\limits_{i \in K} H^i(y)$.

Множество центров может в определенных случаях (см. содержательные интерпретации ниже) рассматриваться как один игрок, имеющий целевую функцию

(37) $W(\vec{s}, y) = H(y) - u(y)$.

Обозначим

(38) $y_{max} = arg \max\limits_{y \in A} H(y)$.

В рассматриваемом примере $y_{max} = \dfrac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$. Запишем условия (29):

(39) $\begin{cases} 2r^1 l^2 - (l^1 + l^2)^2 \geq 0 \\ 2r^2 l^1 - (l^1 + l^2)^2 \geq 0 \end{cases}$

Исключая l^1 или l^2 и вводя реализуемое действие (см. представление (30)), систему неравенств (39) можно записать либо в виде[1]:

(40) $\begin{cases} 2r^1(y - l^1) - y^2 \geq 0 \\ 2r^2 l^1 - y^2 \geq 0 \end{cases}$,

либо в виде:

(41) $\begin{cases} 2r^2(y - l^2) - y^2 \geq 0 \\ 2r^1 l^2 - y^2 \geq 0 \end{cases}$.

---

[1] *В случае двух центров представление (30) за счет того, что стимулирование аддитивно входит в целевую функцию центра, позволяет упростить и наглядно представить на плоскости вид решения системы неравенств, описывающих множество равновесий Нэша (ср. (40), (41) и (39)).*

Системы неравенств (40) и (41) задают соответственно множества допустимых значений L_1 и L_2 выплат первого и второго центров (см. рисунок 9).

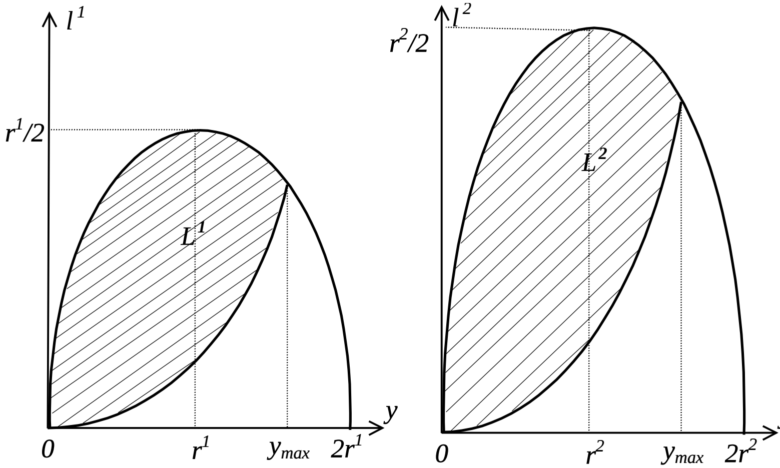

Рис. 9. Множества L_1 и L_2 в примере 4

Таким образом, даже в случае двух центров для фиксированного действия агента, которое центры хотят реализовать, существует целое множество комбинаций выплат со стороны центров (сумма платежей фиксирована, а распределяться между центрами эти платежи могут разными способами). Все эти комбинации принадлежат множеству Парето, следовательно априори (и не вводя дополнительных предположений) сказать что-либо о конкретной реализации точки Нэша нельзя. Поэтому рассмотрим возможные дополнительные предположения о поведении центров.

Первая группа предположений относится к последовательности выбора стратегий центрами, то есть их априорному упорядочению по времени выбора стратегий и взаимным обязательствам следовать установленным правилам игры. Например, игра центров может производиться в два этапа - сначала они согласованно выбирают[1] действие агента, которое в дальнейшем необходимо реализовать, а затем последовательно (например, по-одному) выбирают свои платежи агенту. Если принято решение реализовать действие $y^* \in A$, и центры, обязанные подчиниться этому решению, упорядочены в порядке возрастания их номеров, то, очевидно, что имеет место: $l^k = min\ \{c(y^*); H^k(y^*)\}$, $l^{k-i} = min\ \{c(y^*) - \sum_{j>k-i} l^j\ ; H^{k-1}(y^*)\}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Содержательная интерпретация такого механизма прозрачна: представим себе k-уровневую иерархическую систему управления, которая должна побудить управляемый субъект совершить некоторые действия, то есть, как минимум, компенсировать ему затраты по совершению этих действий. Если ресурс нижнего уровня управления (с номером k, отсчитываемым от самого верхнего уровня иерархии) достаточен для этого (то есть $c(y^*) \leq H^k(y^*)$), то он осуществляет управление самостоятельно, не затрагивая более высоких уровней иерархии. Если ресурс недостаточен (то есть $c(y^*) > H^k(y^*)$), то он полностью использует свой ресурс и обращается за разницей $c(y^*) - H^k(y^*)$ к представителю более высокого уровня, который поступает аналогично и т.д. Понятно, что для более адекватного отражения специфики иерархических многоуровневых ОС можно приписывать различные "ценности" единицам ресурсов различных уровней и т.д. (см. модели иерархических ОС в [59]).

Вторая группа предположений относится к информационному взаимодействию центров (кооперативные игры с нетрансферабельной полезностью), а также к их возможности обмениваться полезностью (кооперативные игры с трансферабельной полезностью) [54, 56, 68]. Если центры могут принимать решения сообща и обладают возможность осуществлять побочные платежи (условно можно считать, что в классе стратегий вида (21) игра центров уже является игрой с трансферабельной полезностью - центры могут в широких пределах "передавать" друг другу полезность, варьируя

[1] *В случае, если функция дохода каждого из центров известна только ему самому, то на этом этапе игры центров может оказаться целесообразным использование механизмов с сообщением информации [21, 35].*

$\{\lambda_i\}$), то возникает *кооперативная игра центров*. Для поиска решений этой игры (например для исследования условий непустоты С-ядра или существования и свойств какого-либо иного решения) необходимо (но не достаточно!) использование представления (32)-(34). Содержательно последнее утверждение означает, что в первую очередь центры могут, например, в первую очередь попробовать образовать максимальную (включающую все центры) коалицию и максимизировать суммарную полезность, побуждая агента выбрать соответствующее действие (см. выражение (34)), а затем обменяться платежами, компенсировав тем центрам, которым выбор агентом именно этого действия не очень выгоден, "потери" в полезности. •

В заключение настоящего раздела сделаем три общих замечания.

Во-первых, в зависимости от степени близости интересов центров в их игре существуют два возможных режима - режим сотрудничества и режим конкуренции, характеризуемый аукционным решением (см. выражение (34) и [13, 63, 86]). В первом случае они совместно компенсируют агенту затраты и получают полезности, большие, чем в случае управления данным агентом по-одиночке. Во втором случае выигравший конкуренцию центр (сумевший предложить агенту более выгодные условия) вынужден не только единолично компенсировать агенту затраты, но и переплачивать ему, чтобы не дать возможность другому центру предложить более выгодные условия.

Во-вторых, несмотря на то, что исследование игры центров в модели РКЗ проводилось для частного случая задачи стимулирования, результаты, аналогичные леммам 9, 11, теореме 10 и следствию 12, могут быть получены и для более общего случая игры Γ_2 с побочными платежами (см. раздел 2.1). В то же время, исследование самого общего случая игры Γ_2 (см. опять же раздел 2.1) с несколькими центрами представляется достаточно трудоемкой и выходящей за рамки настоящего исследования задачей.

В-третьих, так как в настоящей работе исследуется некооперативное взаимодействие участников ОС, то характеризация множества равновесий Нэша, даваемая теоремой 10, может считаться исчерпывающей только условно. Поэтому, как с точки зрения формального анализа, так и с точки зрения содержательных интерпретаций (см. пример 4), напрашивается введение допущения о возможности образования коалиций центрами, что, очевидно, позволит сузить множество решений игры центров. Поэтому исследования кооперативного взаимодействия центров в ОС РК представляется актуальной и чрезвычайно перспективной задачей будущих исследований.

2.2.3. Модель РК5

Отличие модели РК5 от модели РК1 заключается в наличии векторного множества допустимых действий агента, предпочтительность которых оценивается по значениям скалярной функции полезности, то есть $S_{PK5} = \{n_A\ ^3\ 2, f, k = 1, u\}$.

Содержательно модель РК5 соответствует, например, ОС, в которой имеются несколько бизнес-процессов, результаты которых оцениваются по некоторому единому критерию, например, времени, или объему выпуска, или маржинальной прибыли, или затратам и т.д.

Все общие результаты, описанные в разделе 2.1 для модели РК1, остаются в силе и для модели РК5 (напомним, что предположение А.1 заключалось в частности только в компактности допустимых множеств, размерность которых не оговаривалась, а в предположении А.2 достаточно потребовать, чтобы выполнялось $A = \Re_+^{n_A}$, и строгой монотонности функций дохода и затрат по всем переменным). Следовательно, решение задачи синтеза оптимальных (гарантированно ε-оптимальных) управлений для модели РК5 дается теоремой 2 (соответственно - теоремой 1). Единственное отличие заключается в том, что в случае многомерного множества допустимых действий в задаче стимулирования понятие "правой границы" $y^+(C)$ максимального множества реализуемых действий теряет смысл.

Для задач стимулирования существует глубокая взаимосвязь между моделями ОС с векторными действиями агента и многоэлементной ОС, в которой агенты выбирают скалярные действия, а их вознаграждение основывается на наблюдаемом агрегированном результате их деятельности, являющемся известной функцией от их действий (подробное описание решения этой задачи и соответствующие примеры приведены в [4, 5, 59, 63]).

2.2.4. Модель РК13

Отличие модели РК13 от модели РК1 заключается в наличии векторной целевой функции агента, по значениям компонент которой он оценивает предпочтительность скалярного (описываемого одним показателем) действия, то есть $S_{PK13} = \{n_A = 1, \vec{f}, k = 1, u\}$.

Содержательно модель РК13 соответствует, например, ОС, в которой имеется один бизнес-процесс, результаты которого оцениваются агентом, реализующим этот процесс, по нескольким критериям, например, времени, объему выпуска, затратам и т.д.

В теории принятия решений получено значительное число результатов [3, 12, 29, 40, 41, 50, 55, 64, 70, 71, 74, 78], посвященных методам поиска множества Парето, исследованию его свойств и т.д., описывать которые подробно мы не будем. Отметим лишь, что вся трудность исследования моделей ОС с векторными предпочтениями участников заключается в отсутствии для этого случая единой универсальной концепции рационального выбора. Если в случае скалярных предпочтений участников (то есть предпочтений, описываемых целевыми функциями, отображающими декартово произведение допустимых множеств всех участников в $\hat{A}^1$) их рациональное поведение заключалось в стремлении к максимизации целевой функции выбором собственной стратегии (при этом, правда, приходится доопределять выбор в случае, когда множество максимумов содержит более одной точки - см. ГБ и принцип МГР выше), то в случае векторных предпочтений понятие рационального поведения определяется не столь однозначно. Понятно, что следует потребовать, чтобы участник ОС выбирал стратегию которая не ухудшала бы одновременно значения всех критериев (аксиома Парето), однако в большинстве случаев это требование является слишком слабым. Поэтому при построении конкретной модели исследователь операций вынужден конкретизировать закладываемые в модель предположения о поведении центров и агента, то есть вводить допущения, в рамках которых моделируемая ОС описывается наиболее адекватно (с его субъективной точки зрения с учетом всей имеющейся объективной информации). Перейдем к формальным определениям.

Обозначим $N_f = \{1, 2, \ldots, n_f\}$ - множество критериев и определим множество действий, оценки которых при данном управлении $u \in U$ эффективны по Парето[1]:

(1) $Par(A, u, \{f_i\}) = \{y \in A \mid \forall\, y' \in A\ (f_i(u, y') \geq f_i(u, y),\ i \in N_f) \to$

$\to f_i(u, y') = f_i(u, y)\}$,

то есть множество таких действий агента, что выбор любых других действий приводит к ухудшению оценок хотя бы по одному из критериев.

Определим также множество полуэффективных (оптимальных по Слейтеру) при данном управлении $u \in U$ действий агента:

(2) $Sl(A, u, \{f_i\}) = \{y \in A \mid \forall\, y' \in A\ \exists\, i \in N_f\colon f_i(u, y') \leq f_i(u, y)\}$.

Естественно считать[2], что множество реализуемых действий содержится в соответствующем множестве типа (1), то есть агент заведомо выбирает действия, недоминируемые по Парето.

Множество (1) может оказаться слишком широким для того, чтобы конструктивно его использовать как определение множества реализуемых действий $P(u)$, следовательно, хотелось бы определить $P(u)$ таким образом, чтобы выполнялось

(3) $P(u) \subseteq Par(u)$.

Итак, при попытке определения множества решений игры в модели ОС РК, в которой агент имеет векторные предпочтения, мы сталкиваемся с традиционной для многокритериальной оптимизации и теории принятия решений при нескольких критериях про-

---

[1] *Еще раз подчеркнем глубокую взаимосвязь (с точки зрения методов описания и исследования) между многоэлементными ОС с унитарным контролем и ОС РК. В многоэлементных ОС УК имеет место игра агентов и считается, что агенты выбирают вектор действий, принадлежащий множеству равновесий Нэша* $E_N(u)$*, в ОС РК единственный агент выбирает вектор действий принадлежащий множеству Парето (1). Если интерпретировать критерий агента в ОС РК как самостоятельного агента, то получим многоэлементную ОС УК, причем множества Парето и Нэша могут не совпадать. Если же* $E_N(u) \cap Par(u) \neq \emptyset$*, то можно считать, что модели в определенном смысле эквивалентны.*

[2] *Отметим, что в скалярном случае* ($n_f = 1$) *множества (1) и (2) оптимальных по Парето и по Слейтеру действий агента совпадают с множеством максимумов его целевой функции:*

$$Par(A, u, f) = Sl(A, u, f) = P(u) = Arg\max_{y \in A} f(u, y).$$

блемой – проблемой определения рационального выбора. Единственное требование, относительно необходимости удовлетворения которому согласны подавляющее большинство исследователей, это - аксиома Парето. Таким образом, помимо описанной выше игры центров (см. модель РКЗ), в ОС РК существует еще одна **характерная особенность - многокритериальность предпочтений агентов**, порождающая (как и наличие нескольких центров) необходимость корректного доопределения рационального выбора.

Не претендуя на полноту охвата всех известных в многокритериальной оптимизации моделей и методов, рассмотрим несколько подходов, представляющих в контексте настоящего исследования наибольший интерес.

Пусть предпочтительность действий и управлений оценивается агентом по n_f критериям: $\{f_1(u, y), f_2(u, y), ..., f_{n_f}(u, y)\}$. Функция $f_{N_f}(u, y)$ называется возрастающей по системе критериев[1] агента, если из выполнения системы неравенств $f_i(u_1, y_1)$ ³ $f_i(u_2, y_2)$, i Î N_f, u_1, u_2 Î U, y_1, y_2 Î A следует справедливость неравенства $f_{N_f}(u_1, y_1) > f_{N_f}(u_2, y_2)$. Максимизация функции $f_{N_f}(\cdot)$ по y Î A при заданном u Î U является достаточным условием Парето оптимальности соответствующего действия при данной системе критериев агента.

Если предположить, что имеет место ГБ, то есть считать, что агент выбирает при заданном управлении действие из множества недоминируемых по Парето действий, то можно рассматривать функцию $f_{N_f}(u, y)$ в качестве целевой функции агента и воспользоваться для нее общими теоремами 1 и 2. Однако, при этом эффективность не будет максимальной, так как целевая функция центра будет максимизироваться не на множестве Парето, а на его подмножестве (максимизация функции, возрастающей по системе критериев является достаточным[2], но не необходимым условием).

---

[1] *Свойства подобных функций, их примеры, а также необходимые условия оптимальности по Парето, сформулированные их терминах, приведены в [64, 70, 79].*

[2] *Можно воспользоваться также и другими достаточными условиями, например - максимизировать один из критериев, также обеспечивая при*

Для достижения максимальной эффективности следует использовать необходимые условия эффективности по Парето [70], которые, к сожалению, на сегодняшний день не позволяют получить простого аналитического решения и требуют значительных вычислительных затрат.

Другой возможный подход основывается на полученном в [8, 9] результате о взаимосвязи задач многокритериальной оптимизации и задач согласованного планирования. Для системы критериев агента введем следующую функцию[1]:

(4) $f(u, x, y) = \min\limits_{i \in N_f} \{f_i(u, y) - f_i(u, x)\}$.

Множество $S(A, u, f)$ Í A называется множеством согласованных планов и определяется следующим образом:

(5) $S(A, u, f) = \{x$ Î A | " y Î A $f(u, x, x)$ ³ $f(u, x, y)\}$.

В [9] доказано, что множество согласованных планов для функции (4) совпадает с множеством эффективных по Слейтеру (при заданной системе критериев агента) действий агента, то есть $Sl(A, u, \{f_i\}) = S(A, u, f)$. Этот результат позволяет свести задачу определения множества полуэффективных точек к задаче согласованного планирования, методы решения которой детально исследованы и подробно описаны в [2, 10, 16, 23]. Однако, этот подход не намного проще, чем непосредственное использование общих результатов характеризации множества Парето в многокритериальных задачах.

Перейдем к рассмотрению задачи стимулирования в модели РК13. Содержательные интерпретации подобных моделей затруднительны со следующей точки зрения. Если скалярным управлением единственного центра является выбор системы стимулирования, то при нескольких критериях неясно как стимулирование должно учитываться в векторной целевой функции агента. Если оно аддитивно входит (например, в определенной пропорции) одновременно в несколько критериев агента, то это уже векторное управление (см. описание соответствующих моделей более высокого уровня слож-

---

этом эффективность по Парето, и т.д. Этот подход позволяет добиться «субъективного» максимума целевой функции центра, если последняя зависит только от одной из компонент вектора действий агента.

[1] *В качестве управления в выражении (4) можно использовать оптимальную в модели РК1 квазикомпенсаторную систему стимулирования.*

ности ниже), если стимулирование входит только в один из критериев, то остальные критерии "неуправляемы", то есть получаем базовую модель РК1, подробно описанную выше. По этим причинам рассматривать задачи стимулирования в модели РК13 мы не будем, отложив изучение специфики задач стимулирования при векторных предпочтениях управляемых субъектов до этапа описания моделей более высокого уровня сложности, то есть моделей, в которых присутствуют векторные предпочтения и либо векторные управления со стороны единственного центра, либо несколько центров (либо, естественно, и то и другое).

В целом можно сделать заключение, что на сегодняшний день (ни в теории принятия решений и многокритериальной оптимизации, ни в теории управления социально-экономическими системами) не существует универсальных методов формализации рационального многокритериального выбора управляемых субъектов в задачах управления, и как следствие не существует общих эффективных аналитических методов решения задач управления. Поэтому, наверное, целесообразна разработка простых методов решения для набора практически важных и содержательно интерпретируемых задач управления для того, чтобы на их основе пытаться делать более общие выводы.

2.3. МОДЕЛИ ВТОРОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

При изучении моделей ОС РК второго уровня сложности мы имеем возможность адаптированно использовать полученные в предыдущих разделах результаты исследования ОС с унитарным контролем (раздел 2.1) и ОС РК первого уровня сложности, поэтому при изложении материала этого и последующих двух разделов основное внимание будет уделяться тем синергетическим эффектам, которые возникают за счет наличия одновременно нескольких характерных для ОС РК признаков - игры центров, многокритериальности предпочтений агентов и т.д.

2.3.1. Модель РК4

Отличие модели РК4 ($\Sigma_{РК4} = \{n_A = 1, f, k \geq 2, \vec{u}\}$) от модели РК3 (см. рисунок 5) заключается в том, что каждый центр выбирает собственное управление, и в целевой функции агента явным образом фигурируют все управления центров, а не их агрегат как это имело место в модели РК3. Кроме того, откажемся от предположения А.3, которое гласило, что целевая функция каждого центра явным образом зависит только от его собственных управлений и действия агента, и допустим, что выигрыш каждого центра в общем случае может зависеть от стратегий всех центров. Тогда равновесие Нэша в игре центров примет вид: $\forall\, i \in K,\ \forall\, u^i \in U^i$

(1) $F^i(u_N^i, u_N^{-i}, y^i(u_N^i, u_N^{-i})) \geq F^i(u^i, u_N^{-i}, y^i(u^i, u_N^{-i}))$.

В задаче стимулирования в силу аддитивности стимулирования и скалярности действий агента целевая функция i-го центра имеет вид: $W^i(\vec{\sigma}, y) = H^i(y) - \sigma^i(y),\ y \in P(\vec{\sigma}),\ i \in K$,
а целевая функция агента[1]:

$$w(\vec{\sigma}, y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y) - c(y).$$

---

[1] *Напомним, что в модели РК3 целевая функция агента имела вид* $w(\vec{\sigma}, y) = u(y) - c(y)$, *где* $u(y) = \sum_{i \in K} \sigma_i(y)$ *- суммарные затраты центров на стимулирование, являющееся их "общим" скалярным управлением.*

Поэтому задача стимулирования в модели РК4 совпадает с задачей стимулирования в модели РК3, решение которой дается теоремами 10-12.

2.3.2. Модель РК6

Характерной особенностью модели РК6 (S_{PK6} = {n_A ³ $2, f$, $k = 1$, $\vec{u}$ }) является наличие векторных действий агента и векторных управлений со стороны единственного центра (см. рисунок 5). Так как целевые функции участников скалярны, то решение задачи управления в модели РК6 дается теоремами 1 и 2, а решение задачи стимулирования в этой модели определяется теоремами 7 и 8 (см. раздел 2.1 и описание моделей РК2 и РК5 в разделах 2.2.1 и 2.2.4 соответственно).

2.3.3. Модель РК7

В модели РК7 (S_{PK7} = {n_A ³ $2, f, k$ ³ $2, u$}) присутствуют несколько центров, выбирающих совместно скалярные управления, а векторные действия агента оцениваются им по значениям скалярной целевой функции, поэтому для данной модели применимы все результаты, полученные в разделе 2.2.2 для модели РК3 (напомним, что при доказательстве утверждений 9-12 размерность множества допустимых действий агента не оговаривалась).

2.3.4. Модель РК9

В модели РК9 S_{PK9} = {n_A ³ 2, $\vec{f}$, $k = 1, u$} агент имеет векторное множество допустимых действий, предпочтительность которых оценивается по нескольким критериям, то есть в общем случае f_i: $\Re^{n_A}$ ® $\hat{A}^1$, i $\hat{I}$ N_f. Множество реализуемых действий $P(u)$ агента и множество его Парето оптимальных действий $Par(A, u, \{f_i\})$ практически ничем не отличаются от соответствующих множеств, фигурирующих в модели РК13 (см. также более общую, чем модель

РК13, модель РК14, детально описываемую ниже), поэтому подробно рассматривать данную модель мы не будем, тем более, что в силу скалярности управления содержательные интерпретации задачи стимулирования в ней затруднительны.

2.3.5. Модель РК14

Отличие модели РК14 $S_{PK14} = \{n_A = 1, \vec{f}, k = 1, \vec{u}\}$ от модели РК13 (см. рисунок 5) заключается в наличии векторных управлений со стороны единственного центра, а отличие от модели РК2 заключается в наличии векторных предпочтений агента.

Будем считать, что выполнено следующее предположение:

А.4. $n_f = n_u$; $f_i = f_i(u_i, y), i \in N_f$,

то есть каждая компонента управления соответствует одному и только одному критерию оценки агентом своих действий. С содержательной точки зрения можно считать, что каждому критерию (отражающему определенный аспект деятельности агента) соответствует некоторое управление и только оно. В рамках предположения А.4 возможно обобщение теорем 1 и 2 (см. теорему 13 ниже).

Пусть ограничения на управление имеют следующий вид.

А.5. $u_i \in U_i, i \in N_u = \{1, 2, \ldots, n_u\}$.

Введем следующие обозначения.

Стратегия наказания $u_{нi}$ агента центром соответствует минимизации соответствующей компоненты целевой функции агента по стратегии центра:

(1) $f_i(\hat{u}_{н\,i}(y), y) = \min\limits_{u_i \in U_i} f_i(u_i, y), i \in N_u$.

Абсолютно оптимальная стратегия центра $\check{u}_0$ соответствует максимизации его целевой функции по собственной стратегии:

(2) $F(\check{u}_0, y) = \max\limits_{\vec{u} \in U} F(\vec{u}, y)$,

где $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n_u}) \in U$. В рамках предположения А.5 $U = \prod\limits_{i \in N_u} U_i$.

Обозначим L_i - максимальное гарантированное значение i-ой компоненты целевой функции агента:

(3) $L_i = \max\limits_{y \in A} f_i(\hat{u}_{\text{н}\, i}(y), y),\ i \in N_f$;

E_i - множество действий агента, обеспечивающих ему получение по соответствующему критерию выигрыша L_i:

(4) $E_i = \{y \in A \mid f_i(\hat{u}_{\text{н}\, i}(y), y) = L_i\},\ i \in N_f$;

$E = \bigcap\limits_{i \in N_f} E_i$ - множество действий агента, обеспечивающих ему получение по каждому из критериев выигрыша (3);

D_i - множество пар стратегий центра и агента, при которых значение соответствующей компоненты целевой функции агента строго превышает максимальное гарантированное значение:

(5) $D_i = \{(\vec{u}, y) \in U \times A \mid f_i(u_i, y) > L_i\},\ i \in N_f$;

$D = \bigcap\limits_{i \in N_f} D_i$ - множество пар стратегий центра и агента, при которых значения всех компонент целевой функции агента строго превышают соответствующие максимальные гарантированные значения;

K_1 - максимальное на множестве D значение целевой функции центра:

(6) $K_1 = \begin{cases} \sup\limits_{(\vec{u}, y) \in D} \Phi(\vec{u}, y), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$;

K_2 - максимальное на множестве E значение целевой функции центра:

(7) $K_2 = \min\limits_{y \in E} \max\limits_{\vec{u} \in U} F(\vec{u}, y)$;

$(\vec{u}_\varepsilon, y_\varepsilon) \in D \neq \emptyset$ - пара ε-оптимальных стратегий центра и агента, $\varepsilon > 0$:

(8) $\Phi(\vec{u}_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq K_1 - \varepsilon$.

Решение задачи синтеза управления, обладающего максимальной гарантированной эффективностью, дается следующей теоремой.

Теорема 13а. Пусть для каждой из компонент целевой функции агента и для целевой функции центра выполнено предположение А.1, а также выполнены предположения А.4 и А.5. Тогда $K_g^* = max\ \{K_1, K_2\} - e,\ e > 0$, а стратегия

$$(9)\quad \vec{u}_e^{\,*} = \begin{cases} \vec{u}_e, \text{ если } y = y_e,\ K_1 > K_2 \\ \vec{u}_0, \text{ если } y \in E,\ K_1 \le K_2 \\ \vec{u}_{\text{н}}, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

является гарантированно ε-оптимальной стратегией центра.

Доказательство теоремы 13а полностью аналогично доказательству теоремы 1 с учетом того, что так как максимумы и минимумы компонент целевой функции агента вычисляются независимо (используя управление (9) центр обеспечивает выполнение $E_i = E,\ D_i = D = \{y_e\},\ i \in N_f$), рассматриваемая задача распадается на n_f задач, решение каждой из которых дается теоремой 1.

Содержательно центр фиксирует действие, которое он хочет реализовать, и наказывает агента (независимо по каждому критерию!) при выборе других действий (при этом агент получает выигрыши $\{L_i\}$), поощряя за выбор реализуемого действия (выигрыши агента при этом строго превышают $\{L_i\}$). В результате множество Парето состоит из единственной точки - реализуемого действия[1].

Введем в рассмотрение множество D_0 - множество пар стратегий центра и агента, при которых значение каждой из компонент целевой функции агента не меньше соответствующего максимального гарантированного значения:

$$(10)\quad D_0 = \{(\vec{u}, y) \in U \times A \mid f_i(u_i, y) \ge L_i,\ i \in N_f\}.$$

Решение задачи синтеза оптимального в рамках ГБ управления дается следующей теоремой.

Теорема 13б. Пусть для каждой из компонент целевой функции агента и для целевой функции центра выполнено предположение А.1, а также выполнены предположения А.4, А.5 и ГБ. Тогда

$$(11)\quad K^* = \max_{(\vec{u},\, x) \in D_0} F(\vec{u}, x),$$

[1] *Еще раз отметим, что возможность независимого поощрения и наказания агента обусловлена предположениями А.4 и А.5.*

а стратегия

(12) $$\vec{u}^* = \begin{cases} \tilde{\vec{u}}^*, \text{ если } y = x^* \\ \vec{u}_{\text{н}}, \text{ если } y \neq x^* \end{cases},$$

где

(13) $$(\tilde{\vec{u}}^*, x^*) = arg \max_{(\vec{u}, y) \in D_0} F(\vec{u}, y)$$

является оптимальной стратегией центра[1].

Доказательство теоремы 13б аналогично доказательству теоремы 2 с учетом замечаний, сделанных выше в настоящем разделе при обсуждении отличий теоремы 13а и теоремы 1.

Итак, теоремы 13а и 13б дают решение задачи управления в модели РК 14 в случае, когда каждая компонента управления соответствует одному и только одному критерию оценки агентом своих действий (см. предположение А.4) и отсутствуют общие ограничения на управления (см. предположение А.5). Сложнее дело обстоит в общем случае игры Γ_2, когда предположения А.4 и А.5 не выполнены. При этом возможна ситуация, в которой $n_f \neq n_u$ и $f_i = f_i(\vec{u}, y)$, $i \in N_f$, то есть каждая компонента целевой функции агента может зависеть от всех компонент управления, выбираемого центром, а размерности вектора управления и предпочтений агента могут различаться. Понятно, что в этом случае результат теоремы 13 не имеет места, так как может не существовать управления, минимизирующего или максимизирующего одновременно значения всех критериев оценки агентом своих действий. Та же проблема возникает и в случае, когда существуют общие ограничения на компоненты управления, то есть ограничения на управление имеют вид $\vec{u} \in U$. Исследование этих задач представляет существенный интерес для развития теоретико-игровых моделей управления, однако, выходит за рамки настоящей работы.

Перейдем к рассмотрению задачи стимулирования, в которой целевая функция агента имеет вид:

(14) $w_i(\sigma_i, y) = \sigma_i(y) - c_i(y)$, $i \in N_f$,

---

[1] *Отметим, что в теоремах 13а и 13б не требуется скалярности множества допустимых действий агента, то есть полученные результаты справедливы и для модели РК 10* (*см. раздел 2.4.2 ниже*).

где $c_i(\cdot)$ - i-я компонента затрат агента, а целевая функция центра в рамках предположения А.4 имеет вид:

(15) $W(\vec{s}, y) = H(y) - \sum_{i \in N_f} s_i(y)$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. В первом случае (для которого справедливы теоремы 13а и 13б) выполнено предположение А.5, следовательно стимулирование агента за каждую компоненту деятельности может выбираться независимо от стимулирования других компонент, то есть s_i Î U_i, i Î N_f. Если для каждой из компонент целевой функции агента выполнено предположение А.2, то возможна декомпозиция стимулирования (по аналогии с принципом декомпозиции игры агентов в [63]), которая реализуется следующим образом.

Из теорем 13а и 13б вытекают соответственно два следующих утверждения.

<u>Следствие 14.</u> Система стимулирования

(16) $s_{K_i}(y^*, y) = \begin{cases} c_i(y) + d_i, & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases}$, y^* Î A, i Î N_f

реализует действие y^* и является d-оптимальной, где $d = \sum_{i \in N_f} d_i$.

При использовании центром системы стимулирования (16) действие y^* Î A является единственной Парето-оптимальной точкой.

<u>Следствие 15.</u> В рамках ГБ система стимулирования (16) с $d = 0$ реализует действие y^* и является оптимальной.

Случай 2. Во втором случае предположение А.5 не выполнено, следовательно стимулирование агента за каждую компоненту деятельности не может выбираться независимо от стимулирования по другим компонентам, то есть ограничение на стимулирование имеет вид: $\vec{s}$ Î M. Тем не менее, в отличие от общего результата теоремы 13, задача стимулирования за счет своей специфики допускает простое решение и в этом случае.

Введем следующее предположение относительно множества допустимых управлений M.

А.6. Если $\vec{\sigma} \in M$, то $\forall\, \alpha_i \in [0; 1]$, $i \in N_f$ выполнено:

$$(\alpha_1\, \sigma_1, \alpha_2\, \sigma_2, \ldots, \alpha_{n_f}\, \sigma_{n_f}) \in M.$$

Содержательно, предположение А.6 означает, что множество допустимых управлений (имеющее вид конусного отрезка с вершиной в нуле) обладает следующим свойством: если допустимо некоторое управление (некоторый вектор выплат агенту), то допустимо любое другое управление, при котором вознаграждение агента за каждую из компонент его деятельности не ниже исходного.

Определим множество

(17) $P_K(M) = \{y \in A \mid (c_1(y), c_2(y), \ldots, c_{n_f}(y)) \in M\}$,

то есть множество действий агента, реализуемых в рамках ГБ[1] системами стимулирования типа (16) с $\delta = 0$, принадлежащими множеству M.

Обозначим $P(M) = \bigcup_{\vec{\sigma} \in M} Par(A, \vec{\sigma}, \{f_i\})$ - множество действий, которые могут быть реализованы (то есть сделаны эффективными по Парето) при использовании центром функций стимулирования из множества M.

Покажем, что класс систем стимулирования (16) (с параметром $y^* \in A$) характеризуется максимальным множеством реализуемых действий.

Лемма 16. Пусть выполнены предположения А.1-А.4 и А.6. Тогда $P_K(M) = P(M)$.

Доказательство. Пусть $\exists\, y' \in P(M)$: $y' \notin P_K(M)$. Тогда $(c_1(y'), c_2(y'), \ldots, c_{n_f}(y')) \notin M$. Фиксируем систему стимулирования $\vec{\sigma}\,' \in M$ такую, что $y' \in Par(A, \vec{\sigma}\,', \{f_i\})$. В силу предположения А.6 выполнено $y' \in Par(A, \vec{\sigma}_1, \{f_i\})$, где $\sigma_{1i}(y) = \begin{cases} \sigma_i'(y), & y = y' \\ 0, & y \neq y' \end{cases}$, $i \in N_f$. В силу условий реализуемости $\sigma_{1i}(y') \geq c_i(y')$, $i \in N_f$, что противоречит предположению А.6. •

---

[1] *При отказе от ГБ множество гарантированно реализуемых действий агента (являющееся внутренностью множества $P_K(M)$) будет незамкнутым, что приведет к "техническим" проблемам при постановке и решении соответствующих оптимизационных задач (см. также раздел 2.1).*

Следствие 17. Пусть выполнены предположения А.1-А.4 и А.6. Тогда в рамках гипотезы благожелательности система стимулирования (16) с $d = 0$ является оптимальной в классе M.

Доказательство. Эффективность класса систем стимулирования типа (16) равна

(18) $K_K = \max\limits_{y \in P_K(M)} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N_f} c_i(y)\}$.

Эффективность оптимальной в классе M системы стимулирования $\vec{s}\,'$ равна

(19) $K(\vec{s}\,') = \max\limits_{y \in P(M)} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N_f} s_i'(y)\}$.

В силу введенных предположений выполнено

$$y' \hat{I}\ Par(A, \vec{s}_1, \{f_i\}),$$

где

(20) $s_{1i}(y) = \begin{cases} s_i'(y), & y = y' \\ 0, & y \neq y' \end{cases}, i\ \hat{I}\ N_f$.

Из условий реализуемости следует, что для оптимального действия $y' \hat{I}\ A$, реализуемого системой стимулирования $\vec{s}\,'$, должно выполняться

(21) $s_{1i}(y') \geq c_i(y'), i\ \hat{I}\ N_f$.

Сравнивая (18) и (19), с учетом (20) и (21), а также результата леммы 16, получаем, что $K_K = K(\vec{s}\,')$. •

Оптимальное реализуемое действие в обоих случаях определяется из условия максимума целевой функции центра:

(22) $y^* = arg \max\limits_{y \in P_K(M)} \{H(y) - \sum\limits_{i \in N_f} c_i(y)\}$.

Итак, в рамках введенных предположений оптимальное решение задачи стимулирования в модели РК 14 имеет вид (16), (22). Еще раз отметим, что одним из преимуществ систем стимулирования вида (16) с $d_i > 0, i\ \hat{I}\ N_f$, является то, что при их использовании центром множество Парето оптимальных стратегий агента состоит из единственной точки.

В результате рассмотрения задачи стимулирования в ОС с агентом, имеющим векторные предпочтения, можно сделать следующий общий качественный вывод: в силу аддитивности каждой из компонент целевой функции агента по стимулированию, а также в силу аддитивности целевой функции центра по стимулированию, набор целевых функций, отражающий предпочтения агента, может с точки зрения центра (см. (22)) быть заменен единственной целевой функцией, являющейся их суммой ($c(y) = \sum_{i \in N_f} c_i(y)$, $s(y) = \sum_{i \in N_f} s_i(y) = J(y)$). При этом один агент с векторными предпочтениями может рассматриваться как n_f агентов, имеющих скалярные предпочтения и выбирающие одно и то же действие.

Таким образом, в модели РК 14 (то есть в ОС, в которой имеется агент с векторными предпочтениями, на каждую из компонент которых влияет соответствующая компонента вектора управлений) возможно аналитическое решение задачи управления. Напомним, что при обсуждении модели РК 13 (модели первого уровня сложности, в которой впервые появляются векторные предпочтения - см. раздел 2.2.4) отмечалось, что на сегодняшний день в общем случае не решена проблема определения рационального выбора агента при его многокритериальных предпочтениях. В задаче стимулирования при отсутствии "сильных" ограничений на взаимосвязь критериев агента (см. предположение А.4) и взаимозависимость управлений (см. предположение А.5) удается добиться единственности Парето оптимального действия агента, что позволяет конструктивно определить его рациональный выбор и исследовать зависимость последнего от выбираемых центром управлений.

2.3.6. Модель РК15

В модели РК15 $S_{PK15} = \{n_A = 1, \vec{f}, k \geq 2, u\}$ управление со стороны центров скалярно, поэтому ее отличие от "ближайшей" модели первого уровня сложности - модели РК3 (см. рисунок 5) - заключается в том, что скалярные действия агента оцениваются им по нескольким критериям. Задача стимулирования при этом бессмысленна[1] (см. также описание модели РК13 в разделе 2.2.4), а в общем случае основная проблема заключается в определении рационального (с учетом многокритериальности предпочтений) выбора агента при заданных управлениях (см. обсуждение в разделе 2.2.4).

2.4. МОДЕЛИ ТРЕТЬЕГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ

В моделях третьего уровня сложности (модели: РК 8, РК 10, РК 11, РК 16 - см. рисунок 5) отсутствует только один из четырех присущих ОС РК характерных признаков: в модели РК 8 агент имеет скалярные предпочтения, в модели РК 10 имеется один центр, в модели РК 11 управление, выбираемое несколькими центрами, скалярно, в модели РК 16 скалярно множество допустимых действий агента. В то же время, именно в моделях третьего уровня сложности в полной мере проявляются все специфические для распределенного контроля эффекты (см. также описание наиболее общей модели ОС РК - модели РК 12 - в разделе 2.5).

2.4.1. Модель РК8

Отличие модели РК 8 ($S_{PK8} = \{n_A \geq 2, f, k \geq 2, \vec{u}\}$ - см. рисунок 5) от модели РК 4 заключается в наличии многомерного множества допустимых действий агента, от модели РК 6 - в наличии нескольких центров, от модели РК 7 - в наличии векторных управлений.

Решение задачи стимулирования для этого случая дается теоремами 10-12, так как при их доказательстве никаких предположе-

[1] *Если считать, что компенсаторная система стимулирования должна компенсировать агенту суммарные затраты (где суммирование производится по компонентам целевой функции, то есть предпочтения считаются аддитивными), то решение задачи стимулирования дается теоремами 10-12, если предположить, что* $\{y^i(\vec{u})\}$, $y(\vec{l}) \in Par(A, \vec{u}, \{f_i\})$ *- известные зависимости. Однако, содержательные интерпретации результатов применения такого подхода затруднительны.*

ний относительно размерности множества A не вводилось (см. также описание модели РК 7 в разделе 2.3.3).

2.4.2. Модель РК10

Отличие модели РК 10 ($S_{РК10} = \{n_A \geq 2,\ \vec{f},\ k = 1,\ \vec{u}\}$ - см. рисунок 5) от модели РК 6 заключается в наличии векторных предпочтений агента, от модели РК 9 - в наличии векторных управлений, от модели РК 14 - в наличии многомерного множества допустимых действий агента.

Так как при исследовании модели РК 14 никаких предположений относительно размерности множества A не вводилось (см. утверждения 13-17), то все полученные в разделе 2.3.5 результаты остаются в силе и для модели РК 10.

2.4.3. Модель РК11

Отличие модели РК 11 ($S_{РК11} = \{n_A \geq 2,\ \vec{f},\ k \geq 2,\ u\}$ - см. рисунок 5) от модели РК 7 заключается в наличии векторных предпочтений агента, от модели РК 9 - в наличии нескольких центров, от модели РК 15 - в наличии многомерного множества допустимых действий агента.

В данной модели одновременно имеют место, как игра центров, так и векторные предпочтения агента, то есть оба характерных для ОС РК признака, поэтому для нее справедливы полученные в разделах 2.2.2 и 2.3.5 результаты, независимо справедливые для моделей РК 3 и РК 14 соответственно. В силу скалярности управления содержательные интерпретации задачи стимулирования для модели РК 11 затруднительны (см. также предположения А4, А.5 и комментарии к теореме 13).

2.4.4. Модель РК16

Отличие модели РК 16 ($S_{РК16} = \{n_A = 1, \vec{f}, k \geq 2, \vec{u}\}$ - см. рисунок 5) от модели РК 4 заключается в наличии векторных предпочтений агента, от модели РК 14 - в наличии нескольких центров, от модели РК 15 - в наличии векторных управлений.

В данной модели наиболее ярко проявляются все характерные для ОС РК признаки - и игра центров, и векторные предпочтения агентов при векторных управлениях. Несколько забегая вперед, отметим, что, несмотря на то, что данная модель принадлежит классу моделей третьего уровня сложности (существует более общая модель - модель РК 12, принадлежащая максимальному - четвертому - уровню сложности), все результаты, приведенные в настоящем разделе, справедливы и в самом общем случае, то есть применимы для модели РК 12, так как множество допустимых действий агента не предполагается одномерным (см. ниже).

Общая постановка задачи управления в модели РК 16 практически повторяет постановку задачи управления в модели РК 3 (равновесие Нэша в игре центров определяется аналогично выражению (1) раздела 2.2.2), отличие заключается в том, что вводятся дополнительные предположения относительно множества действий, реализуемых данными управлениями центров, например, может считаться, что действие агента принадлежит множеству недоминируемых по Парето действий $Par(\vec{u})$, и т.д. Исследуем задачу управления на примере модели стимулирования.

Введем следующее предположение[1].

А.7. Функции $c_i(y)$, $i \in N_f$; $H^i(y)$, $i \in K$, удовлетворяют предположению А.2.

Целевая функция i-го центра в рассматриваемой модели стимулирования имеет вид:

$$(1)\quad W^i(\vec{\sigma}^i, y) = H^i(y) - \sum_{j \in N_f} \sigma^i_j(y),\ i \in K$$

---

[1] *Для простоты изложения будем считать, что ограничения на стимулирование отсутствуют (если они присутствуют, то их учет производится по полной аналогии с тем как это делалось в разделе 2.3.5 при исследовании модели РК 14).*

где $\vec{\sigma}^i = (\sigma_1^i,\ \sigma_2^i, \dots,\ \sigma_{n_f}^i)$ - вектор стимулирований, выбранный i-ым центром.

Предпочтения агента в общем случае описываются вектор-функцией с компонентами[1]:

(2) $w_i(\vec{\sigma}, y) = \sum_{j \in K} \sigma_i^j(y) - c_i(y),\ i \in N_f$.

В соответствии с результатами утверждений 14-17, минимальные суммарные затраты центров на стимулирование по реализации действия $y \in A$ равны:

(3) $J(y) = \sum_{i \in N_f} c_i(y)$.

Введем в рассмотрение систему стимулирования

(4) $\sigma_i^j(\vec{\lambda}_i, y) = \begin{cases} \lambda_i^j, & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases},\ i \in N_f, j \in K,$

где $\vec{\lambda}_i = (\lambda_i^1,\ \lambda_i^2, \dots,\ \lambda_i^k),\ i \in N_f$. Величины

(5) $\lambda^i = \sum_{j \in N_f} \lambda_j^i,\ i \in K,$

(6) $\lambda_j = \sum_{i \in K} \lambda_j^i,\ j \in N_f,$

определяют соответственно сумму затрат на стимулирование, выплачиваемых по всем компонентам i-ым центром, и выплачиваемых всеми центрами по j-ой компоненте целевой функции агента.

Из результатов разделов 2.1 и 2.3.5 следует, что в рамках гипотезы благожелательности система стимулирования (4), для которой выполнено

(7) $\lambda_j = c_j(y^*),\ j \in N_f,$

является минимальной системой стимулирования, реализующей действие $y^* \in A$.

---

[1] *Напомним, что в соответствии с принятой системой обозначений центры нумеруются верхними индексами, а компоненты целевой функции агента - нижними индексами.*

Рассмотрим теперь условие того, что система стимулирования, описываемая матрицей $l = \| l_i^j \|$, $i \in N_f$, $j \in K$, является равновесием Нэша в игре центров. Определим максимальный выигрыш i-го центра при условии, что он самостоятельно побуждает агента выбирать те или иные действия:

(8) $W_{\max}^i = \max\limits_{y \in A} \{H^i(y) - \sum\limits_{i \in N_f} c_i(y)\}$, $i \in K$.

Наиболее выгодное для i-го центра действие агента в этом случае есть

(9) $y_{\max}^i = arg \max\limits_{y \in A} \{H^i(y) - \sum\limits_{i \in N_f} c_i(y)\}$, $i \in K$.

Условие выгодности для i-го центра использования системы стимулирования (4) имеет вид

(10) $H^i(y^*) - l^i \ge W_{\max}^i$, $i \in K$.

По аналогии с моделью РК 3 можно доказать, что равновесие Нэша в игре центров определяется следующим утверждением.

Лемма 18. Пусть выполнены предположения А.3 и А.7. Тогда множество равновесий Нэша в игре центров имеет вид:

(11) $L = \{ l, y^* \mid l_i^j \ge 0, y^* \in A, (7), (10)\}$.

Следовательно, если множество L, определяемое выражением (11) не пусто, то при использовании минимальных систем стимулирования (4) существует равновесие Нэша в игре центров, определяемое выражениями (7) и (10).

Упорядочим центры в порядке убывания величин $W_{\max}^i$, $i \in K$, и введем следующее предположение относительно рационального выбора агента.

А.8. При заданной системе стимулирования агент выбирает из недоминируемых по Парето действий то действие, которое обеспечивает максимум суммарного стимулирования.

Лемма 19. Пусть выполнены предположения А.3, А.7 и А.8. Тогда, если множество L пусто, то равновесные[1] стратегии центров определяются следующими выражениями:

(12) $s_i^{*j}(\lambda, y) = \begin{cases} l_i^j, & y = y^{*i} \\ 0, & y \neq y^{*i} \end{cases}$, i Î N_f, j Î K,

(13) $y^* = y^{*1} = y^1_{\max}$,

(14) l_i^1 ³ 0, $l^1 = J(y^1_{\max}) + W^2_{\max} + e$,

а y^{*i}, l_i^j и e - любые, удовлетворяющие следующим условиям:

(15) y^{*i} Î A, l^i Î $[0; H^i(y^{*i})]$, $i = \overline{2, k}$, e Î $(0; W^1_{\max} - W^2_{\max}]$.

Доказательство леммы 19 повторяет доказательство леммы 11 с учетом многокритериальности предпочтений агента и опускается.

Содержательно диктатор обеспечивает агенту максимальное стимулирование, определяемое выражением (14). Предположение А.8 нужно для доопределения рационального выбора агента, иначе при фиксированном суммарном выигрыше агента, равном $W^2_{\max} + e$, может оказаться, что множество Парето содержит точки, отличные от $y^1_{\max}$. В силу этого, предположение А.8 может быть заменено на любое другое предположение, однозначно определяющее действие $y(\mathbf{s})$, выбираемое агентом при заданной системе стимулирования типа (12). Результат леммы 19 при этом практически не изменится (необходимо заменить y^* на $y(\mathbf{s})$ и т.д.), так как действие $y(\mathbf{s})$ всегда может быть реализовано диктатором.

Объединяя результаты лемм 18 и 19, получаем следующее утверждение.

Теорема 20. Пусть выполнены предположения А.3, А.7 и А.8. Тогда, если множество L, определяемое выражением (11), не пусто, то решение задачи стимулирования определяется выражениями (7) и (10), если L = Æ, то решение задачи стимулирования определяется выражениями (12)-(15).

---

[1] *Напомним, что выше мы условились в случае отсутствия равновесия Нэша считать равновесными те стратегии центров, которые устойчивы в смысле "условия угроз" (см. раздел 2.2.2).*

В предельных случаях теорема 20 переходит: при $n_f=1$ - в следствие 12, при $k=1$ - в теорему 17, при $n_f=1$ и $k=1$ - в теорему 7.

2.5. ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТРОЛЕМ (МОДЕЛЬ РК12)

В общей модели ОС РК (модель РК 12 - $S_{PK12} = \{n_A \geq 2, \vec{f}, k \geq 2, \vec{u}\}$ - см. рисунок 5) имеют место одновременно все характерные для распределенного контроля признаки: агент имеет векторные предпочтения на многомерном множестве своих допустимых действий, а несколько центров совместно выбирают векторные управления. Поэтому все остальные базовые модели ОС РК, описываемые в настоящей работе могут рассматриваться как частные случаи этой модели.

В то же время, для модели РК 12 справедливы все результаты, полученные в разделе 2.4.4 для модели РК 16 (см. теорему 20), так как при исследовании последней не предполагалась скалярность множества допустимых действий агента, поэтому дублировать рассуждения мы не будем, а перейдем к обсуждению межуровневого взаимодействия участников многоуровневых организационных систем.

3. СЕТЕВЫЕ СТРУКТУРЫ УПРАВЛЕНИЯ

Во втором разделе настоящей работы описаны базовые модели двухуровневых организационных систем с распределенным контролем. Результаты проведенного исследования позволяют сделать вывод, что в ОС РК присутствуют две характерные черты, отличающие их от систем с унитарным контролем: наличие игры центров (см. описание модели РК 3) и векторных предпочтений агентов[1] (см. описание модели РК 14).

Одним из показателей, по которым описывается ОС, является *структура ОС* - совокупность информационных, управляющих и других связей между участниками ОС, включая отношения подчиненности и распределение прав принятия решений [59]. Совокупность приведенных выше результатов анализа теоретико-игровых моделей ОС РК (то есть задач синтеза оптимальных управлений в ОС с заданной структурой) позволяет сравнивать эффективности различных структур и, следовательно, переходить к изучению задач синтеза оптимальных структур. Поэтому настоящий раздел посвящен в основном анализу сравнительных эффективностей различных структур управления организационными системами.

Во введении были выделены линейные (см. рисунок 1), матричные (см. рисунок 2) и сетевые структуры управления (см. рисунок 3). Более корректно, под *линейной структурой* понимается такая структура, при которой подчиненность участников ОС имеет вид дерева, то есть каждый участник подчинен одному и только одному участнику более высокого уровня иерархии[2]. Двухуровневой ОС с линейной структурой соответствует модель РК 1 (см. раздел 2.1), модели многоуровневых ОС с линейными структурами подробно исследовались в монографии [59].

Под *матричной структурой* понимается такая структура, при которой некоторые участники ОС могут быть подчинены одновре-

---

[1] *Так как наличие векторных предпочтений агента не изменяет принципиально структуру решения (см. описание моделей РК 3 и РК 16), то ограничимся в дальнейшем случаем скалярных предпочтений.*

[2] *Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ, содержащих формальные модели управления организационными системами, рассматривались модели ОС, характеризуемые именно древовидными структурами.*

менно нескольким, находящимся на одном и том же (следующем более высоком) уровне иерархии участникам (так называемое *двойное подчинение* [59] - см. рисунок 2). Двухуровневой ОС с матричной структурой соответствуют модель РК 16. *Межуровневое взаимодействие* [59], понимаемое как подчинение некоторых участников одновременно нескольким участникам, находящимся на различных уровнях иерархии, в ОС с матричной структурой отсутствует.

Сетевой структурой управления называется такая структура управления ОС (см., например, рисунок 3), при которой могут иметь место и двойное подчинение, и межуровневое взаимодействие, причем одни и те же субъекты могут выступать как в роли управляющих органов, так и в роли агентов[1].

Последующее изложение материала настоящего раздела имеет следующую структуру. Сначала в разделе 3.1 кратко обсуждаются полученные в [59] результаты анализа межуровневого взаимодействия в отсутствии двойного подчинения, затем в разделе 3.2 исследуется ромбовидная структура управления (см. рисунок 3), являющаяся элементом сетевой структуры управления, и, наконец, в разделе 3.3 описывается сетевое взаимодействие, в рамках которого могут изменяться роли участников ОС.

3.1. Межуровневое взаимодействие

В [59] рассматривались механизмы стимулирования и планирования в трехуровневых организационных системах, структура подчиненности в которых имела вид дерева (центр верхнего уров-

---

[1] *Следует сделать следующее терминологическое замечание. Под сетевой структурой в некоторых работах понимается иерархическая структура, в которой имеется двойное подчинение (нарушение "древовидности"), в других работах под сетевой структурой понимается такой способ организации взаимодействия участников системы, при котором отсутствует ярко выраженная иерархия (то есть подразумевается, что одноуровневая сеть является "противоположностью" многоуровневому дереву). Предложенное выше определение охватывает оба толкования как частные случаи, рассматриваемые соответственно в разделах 3.2 и 3.3.*

ня, центры промежуточного уровня и агенты на нижнем уровне иерархии), то есть каждый агент был подчинен одному и только одному центру промежуточного уровня, а каждый центр промежуточного уровня был подчинен единственному центру. Как правило, говоря об иерархии, неявно имеют в виду именно древовидную структуру.

Понятно, что в реальных многоуровневых организационных системах может иметь место более сложная структура подчиненности, в частности конкретный агент может быть непосредственно подчинен как некоторому центру промежуточного уровня, так и центру верхнего уровня. Обсудим, следуя в основном [59], эффекты, связанные с "нарушениями иерархичности", то есть проявления межуровневого взаимодействия участников ОС.

Одним из возможных "нарушений иерархии" является наличие двойного межуровневого подчинения, когда один агент или промежуточный центр подчинен одновременно двум или более управляющим органам, находящимся на различных уровнях иерархии. Пример структуры подчиненности, соответствующий этому случаю, приведен на рисунке 10 (A_{2i} подчинен одновременно центру и i-му промежуточному центру).

Пусть в трехуровневой ОС центр имеет полную информацию о моделях несвязанных агентов, то есть агрегирование информации отсутствует. Предположим, что центр верхнего уровня, имея в своем распоряжении фонд заработной платы (ФЗП), может некоторую его часть использовать на стимулирование промежуточных центров, а остаток - на стимулирование непосредственно агентов. Таким образом, задача стимулирования заключается в распределении ФЗП, то есть - в определении оптимального соотношения между частью ФЗП, передаваемой промежуточным центрам (и используемой последними на выплаты агентам), и частью ФЗП, используемой центром непосредственно на стимулирование агентов нижнего уровня. Стимулирование агентов центром является проявлением межуровневого взаимодействия (нарушением *принципа единоначалия*, то есть древовидной структуры подчиненности) и обозначено на рисунке 10 жирной линией.

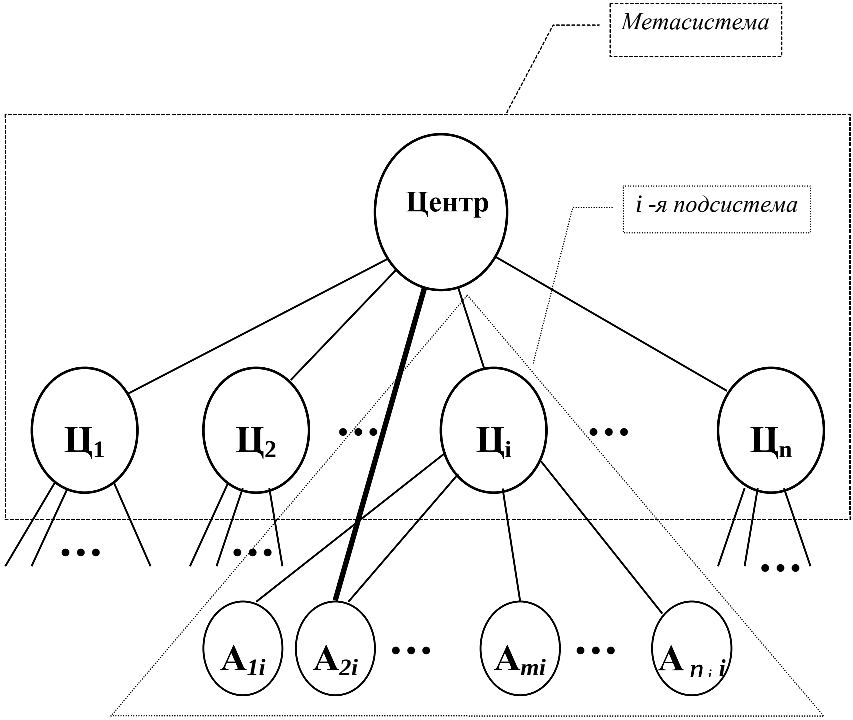

Рис. 10. Пример двойного межуровневого подчинения

Качественно, в рассматриваемой модели происходит "декомпозиция" множества реализуемых действий агентов, которая соответствует разделению ресурса центра на две части, расходуемые на непосредственное стимулирование агентов и стимулирование промежуточных центров. Можно сделать вывод, что для любого размера ФЗП эффективность стимулирования в случае межуровневого взаимодействия не выше, чем в случае линейной структуры управления, в рамках которой весь ресурс расходуется центром на стимулирование промежуточных центров, следовательно, оптимальным является использование всего ФЗП на стимулирование промежуточных центров[1].

В рассматриваемой модели все управляющие органы обладают достаточной свободой в принятии решений (распределении фондов стимулирования и т.д.). Если в некоторой организационной системе зафиксировано такое разграничение функций управления, при котором центры промежуточного уровня обязаны в точности выполнять все исчерпывающие решения центра верхнего уровня (например, приказы в армии), то возможно, что двойное межуровневое подчинение агентов и не приведет к снижению эффективности управления. Примером здесь также может служить распространенное на практике целевое финансирование, при котором статьи и объемы расходования средств, получаемых, например, $Ц_j$ от центра, строго фиксированы. Использование подобных жестких принципов управления фактически соответствует полному прямому подчинению агентов центру верхнего уровня.

В [59] доказано, что, если экономический фактор отсутствует, то эффективность стимулирования в трехуровневой ОС не выше, чем в соответствующей двухуровневой. Выше мы показали, что в трехуровневой ОС "двойное подчинение" агентов центрам разных уровней иерархии не увеличивает эффективности по сравнению с "прямым" подчинением. Эти результаты были получены при предположении, что агрегирование информации отсутствует. Если имеет место агрегирование информации и/или информационный фактор, то эффективность стимулирования при введении косвенного подчинения тем более не возрастет. Содержательно, это связано с тем, что, как правило, в многоуровневых системах центр информирован о моделях агентов не лучше, чем центры промежуточного уровня.

Следовательно, если производится децентрализация двухуровневой ОС (или в более общем случае в многоуровневой ОС вводятся дополнительные промежуточные уровни управления), то в ряде случаев целесообразна "развязка" управления между уровнями - непосредственное управление "через уровень" может оказаться

[1] *Интересно отметить, что сделанный вывод на первый взгляд неочевиден для случая влияния экономического фактора, отражающего привнесение промежуточными центрами собственных ресурсов управления [59].*

неэффективным. Другими словами, в рассматриваемых моделях то, чего может "добиться" от агентов центр, может "добиться" от них с не б*о*льшими затратами и их непосредственный "начальник" - промежуточный центр, если последний будет обеспечен соответствующим ресурсом[1].

Итак, в рассмотренных моделях двойное подчинение агента управляющим органам, находящимся на различных уровнях иерархии, оказывается неэффективным. Косвенным подтверждение этой неэффективности является известный управленческий принцип "вассал моего вассала - не мой вассал". Поэтому с нормативной точки зрения каждый агент должен быть непосредственно подчинен только своему непосредственному "начальнику" - управляющему органу, находящемуся на следующем (и только на следующем) более высоком уровне иерархии.

Возникает закономерный вопрос: почему в реальных организационных системах наблюдаются эффекты двойного межуровневого подчинения? Дескриптивное (без учета нормативной структуры взаимодействия участников и институциональных ограничений) объяснение таково. Обычно (в том числе и выше) предполагается [7, 28, 36, 59, 48, 49], что потери эффективности могут возникать только из-за факторов агрегирования, декомпозиции задач управления и недостаточной информированности центра о моделях агентов. Если же присутствуют, в частности, информационные ограничения на промежуточном уровне - например, количество информации, которое должен переработать управляющий орган некоторой подсистемы, превосходит его возможности - то часть функций управления (быть может, в агрегированном виде) вынужденно передается на более высокий уровень. Проще говоря, основной причиной наблюдаемого на практике двойного межуровневого подчинения, как правило, является некомпетентность (в объективном, а не негативном, смысле этого слова) промежуточного центра. Поэтому, с одной стороны, при решении задач синтеза организаци-

---

[1] Другим примером являются рассмотренные в [59] механизмы планирования, допускающие произвольную децентрализацию (анонимные механизмы распределения ресурса, механизмы экспертизы, механизмы открытого управления с внутренними ценами и др.). В упомянутых моделях структура целевых функций агентов такова, что они идентичны в двухуровневой и соответствующей ей многоуровневой ОС.

онной, функциональной, информационной и других структур ОС априори следует допускать возможность двойного подчинения, стремясь, тем не менее, избежать его насколько это возможно. С другой стороны, наличие двойного межуровневого подчинения в реальной организационной системе косвенно свидетельствует о неоптимальности ее функционирования и должно послужить руководителю сигналом о необходимости пересмотра структуры, а иногда и состава, системы.

Таким образом, с нормативной точки зрения в описанных моделях нарушение принципа единоначалия, как и присутствие двойного межуровневого подчинения (см. выше), не увеличивает эффективности управления. С дескриптивной точки зрения, наблюдаемые на практике его нарушения, обусловлены "некомпетентностью" соответствующих управляющих органов в рамках заданного элементного состава, функциональных, информационных и других связей, а также внутренних (индивидуальных) и внешних ограничений на управление.

С другой стороны, как показывает проведенный анализ, при решении задач синтеза структуры и/или механизмов управления ОС не следует специально концентрировать внимание на эффектах двойного подчинения - их наличие или отсутствие является автоматическим следствием грамотной постановки задачи управления и корректного ее решения с учетом всей специфики многоуровневых организационных систем - экономического, информационного, организационного и других факторов [59].

Отсутствие двойного подчинения (в широком смысле - как одновременного подчинения нескольким управляющим органам одного или различных уровней) достаточно привлекательно с точки зрения анализа системы - в этом случае веерная структура ОС позволяет декомпозировать ее на набор базовых двухуровневых веерных ОС, результаты исследования которых, получаемые с применением всего многообразия известных методов, разрабатываемых до сих пор в основном именно для двухуровневых ОС, могут быть эффективно использованы на этапе синтеза как структуры ОС, так и механизмов управления.

В заключение настоящего раздела отметим, что выше мы рассматривали в основном отрицательные проявления нарушения принципа единоначалия. Поэтому для полноты картины необходимо хотя бы качественно определить те случаи, помимо упомянутых выше (информационная нагрузка, компетентность и др.), в которых наличие распределенного контроля приводит к росту эффективности управления.

Первым и достаточно ярким, как с теоретической точки зрения, так и исходя из опыта практического использования, примером является класс многоканальных механизмов управления, то есть механизмов, в которых управляющие воздействия вырабатываются несколькими (как правило, двумя) параллельно функционирующими каналами управления (принятия решений). Содержательно, высокая (по сравнению с одноканальными) эффективность функционирования многоканальных систем, особенно в условиях неопределенности, обусловлена тем, что эффективности решений, предлагаемых управляющими органами, в различных условиях функционирования также различны [1, 16, 22, 25].

Во-вторых, следует подчеркнуть, что выводы, сформулированные в [59], были получены для моделей многоуровневых ОС, в которых управляемыми параметрами являются скалярные (одномерные) величины - действия агентов. В частности, при исследовании межуровневого взаимодействия вывод о неэффективности двойного межуровневого подчинения был сделан именно для "скалярных" агентов[1]. Содержательно, рассматривалось управление некоторым конкретным аспектом деятельности каждого агента. Понятно, что в реальных организационных системах деятельность управляемого субъекта не всегда может быть описана единственной переменной (см. модели ОС с векторными предпочтениями агентов во втором разделе). Следовательно, результат настоящего раздела более корректно может быть сформулирован следующим образом: в ряде случаев "двойное" управление *одними и теми же аспектами деятельности* не эффективно (более того, в большинстве случаев дублирование управления вредно).

---

[1] *Если перейти от одномерной модели ОС, для которой именно линейная иерархическая (древовидная) структура системы управления имеет максимальную эффективность, к многомерной модели, то получим столь распространенную на практике "векторную" матричную (или, в более общем случае - сетевую) структуру, состоящую из параллельно функционирующих (и в общем случае - взаимодействующих) древовидных структур, «замкнутых» на один субъект управления.*

3.2. Ромбовидная структура управления

Выше при рассмотрении двухуровневой ОС РК с несколькими центрами было установлено, что в игре центров в зависимости от степени согласованности их интересов существуют два режима - режим сотрудничества и режим конкуренции. Исследуем соотношения выигрышей центров (значений их целевых функций) в этих двух режимах.

Режим сотрудничества имеет место, когда непусто множество L равновесий Нэша, задаваемое следующей системой неравенств:

(1) $\sum\limits_{i \in K} l^i = c(y^*)$,

(2) $H^i(y^*) - l^i \geq W^i_{\max}, i \in K$.

Существенным преимуществом режима сотрудничества является его высокая эффективность (в смысле эффективности по Парето результирующего вектора значений целевых функций центров). Недостатком режима сотрудничества является наличие большого числа равновесий Нэша (см. в качестве иллюстрации примеры 2 и 4), приводящее с точки зрения исследователя операций к неопределенности относительно конечного состояния ОС. *Неопределенность* присутствует также и с точки зрения центров, так как в рамках введенных предположений относительно информированности участников организационной системы и порядка ее функционирования при моделировании необходимо доопределять принципы рационального поведения центров[1] - процедуры выбора ими стратегий из числа равновесных по Нэшу (смешанное равновесие Нэша в рассматриваемом классе задач существует крайне редко [59, 86]). Поэтому даже в режиме сотрудничества наличие метацентра, выполняющего лишь информационные функции, например - рекомендующего выбор конкретного равновесия Нэша, может повысить эффективность функционирования ОС за счет снижения неопределенности и информационной нагрузки на центры (см. также обсуждение информационного фактора и фактора неопреде-

---

[1] *Ситуация может упрощаться (с точки зрения принципов принятия решений центрами, но не с точки зрения исследователя операций) при допущении кооперативного взаимодействия центров (см. обсуждение в разделе 2.2.2, а также лемму 21).*

ленности в [59, 62]). Кроме того, метацентр имеет возможность сознательно управлять равновесием в играх центров и агентов и максимизировать агрегированный критерий функционирования организационной системы в целом, быть может, посредством использования системы компенсаций для управляемых субъектов (см. ниже).

Пусть множество L пусто, то есть не существует решения системы неравенств (1)-(2). Тогда имеет место режим конкуренции, аукционному решению в котором соответствует вектор

(3) $\vec{l}\,' = (c(y^1_{\max}) + W^2_{\max} + e, 0, \dots, 0)$.

Вектор значений целевых функций центров при этом равен:

(4) $\vec{W}\,' = (W^1_{\max} - W^2_{\max} - e, H^2(y^1_{\max}), \dots, H^k(y^1_{\max}))$.

Вектор (3) не удовлетворяет условиям (2) и не является равновесием Нэша, так как первый центр при неизменных стратегиях остальных центров может уменьшить выплаты агенту не изменяя при этом реализуемого действия[1]. По этим же причинам можно утверждать, что решение в режиме конкуренции не может доминировать по Парето ни одно из решений, получаемых в режиме сотрудничества.

Итак, недостатки режима конкуренции очевидны, однако для возможности "перехода" от конкуренции к сотрудничеству необходимо введение дополнительных предположений о свойствах рассматриваемой модели. Эти предположения можно условно разделить на две группы: "внутренние" изменения и "внешние" изменения.

"Внутренние" изменения. Предположения относительно "внутренних" параметров модели касаются, в первую очередь, способности центров образовывать коалиции, то есть обмениваться информацией, заключать договоренности и обмениваться полезностью в соответствии с этими договоренностями (см. также обсуждение в разделе 2.2.2).

---

[1] *Отметим, что любое решение из множества L устойчиво относительно "угроз", так диктатор, переходя в режим конкуренции, не может увеличить значение своей целевой функции.*

Обозначим сумму функций дохода центров

(5) $H(y) = \sum_{i \in K} H^i(y)$

и рассмотрим максимальную коалицию (то есть коалицию, включающую все центры) с целевой функцией

(6) $W(y) = H(y) - c(y)$.

Обозначим $y_{max} = arg \max_{y \in A} W(y)$ - действие агента, максимизирующее целевую функцию коалиции, $W_{max} = W(y_{max})$ - максимальное значение целевой функции $W(y)$.

Пусть t^i - положительный, отрицательный или нулевой платеж, получаемый i-ым центром от коалиции. Условие сбалансированности платежей имеет вид:

(7) $\sum_{i \in K} t^i = 0.$

Примем следующее предположение относительно рационального поведения центров: будем считать решением кооперативной игры центров такой вектор их допустимых стратегий, реализующих действие y_{max} (то есть максимизирующих суммарный выигрыш коалиции) и сбалансированных платежей, которые удовлетворяют условиям индивидуальной рациональности:

(8) $H^i(y_{max}) - l^i + t^i \geq W^i_{\max}, i \in K.$

<u>Лемма 21.</u> Если $L \neq \varnothing$, то $\exists\ (\vec{l}_{\max}, y_{max}) \in L$.

Доказательство. Пусть $(y^*, \vec{l}\,)$ - некоторая точка, принадлежащая множеству L. Определим $\tilde{l}^i = H^i(y_{max}) - H^i(y^*) + l^i$, $i \in K$. После несложных преобразований получаем, что

$$\sum_{i \in K} \tilde{l}^i = H(y_{max}) - H(y^*) + c(y^*) = c(y_{max}) + W(y_{max}) - W(y^*) \geq c(y_{max}).$$

Следовательно система платежей $\{\tilde{l}^i\}$ позволяет компенсировать агенту затраты по выбору действия y_{max}. Компоненты вектора $\vec{l}_{\max}$ могут быть выбраны меньшими соответствующих $\tilde{l}^i$ таким образом, чтобы обеспечить выполнение $\sum_{i \in K} l^i_{\max} = c(y_{max})$. •

Следствие 22. В режиме сотрудничества возможность образования коалиции центров не снижает эффективности (в смысле Парето) управления.

Другими словами, из леммы 21 следует, что для любого решения задачи (1)-(2) существует соответствующее решение задачи $\sum_{i \in K} l^i = c(y_{max})$, (7), (8) не меньшей эффективности.

Из леммы 21 также следует, что если соответствующее сотрудничеству равновесие Нэша в игре центров существует, то одним из равновесий является вектор платежей, реализующий действие y_{max}, то есть максимизирующий сумму целевых функций центров.

Следствие 23. Условие $W_{max} \geq \sum_{i \in K} W^i_{\max}$ является необходимым условием непустоты области L.

Доказательство. Пусть область L непуста. Тогда по лемме 21 $\exists\ (\vec{l}_{\max}, y_{max}) \in L$. Запишем систему неравенств, задающую область L, для $y = y_{max}$: $\sum_{i \in K} l^i = c(y_{max})$, $H^i(y_{max}) - l^i \geq W^i_{\max}$, $i \in K$. Суммируя последние k неравенств с учетом первого равенства получаем утверждение следствия. •

Содержательно величина ($W_{max} - \sum_{i \in K} W^i_{\max}$) может рассматриваться как "интегральная" мера согласованности интересов центров.

"Внешние" изменения. Предположения относительно "внешних" параметров модели касаются, в первую очередь, изменений состава и структуры ОС - введению дополнительного уровня иерархии, то есть метаигрока, наделенного властью устанавливать правила игры участников ОС, принадлежащих нижележащим уровням иерархии.

Рассмотрим *ромбовидную структуру управления* трехуровневой ОС, состоящей из одного управляющего органа - *метацентра* - на верхнем уровне иерархии, k центров на промежуточном уровне, и одного агента на нижнем уровне иерархии. Метацентр имеет возможность использовать управления двух типов - институциональное управление и мотивационное управление.

Институциональное управление соответствует запрещению или разрешению тех или иных ситуаций, стратегий и т.д. Например, пусть метацентр установил достаточно сильные штрафы за использование "угроз" в режиме конкуренции. Тогда, даже если равновесия Нэша в игре центров не существует, устойчивым (и в смысле "угроз", которые запрещены, и в смысле Нэша) является следующее решение:

(9) $\vec{l}\,'' = (c(y^1_{\max}), 0, \ldots, 0)$,

то есть диктатор самостоятельно компенсирует затраты агенту, не переплачивая из-за боязни "угроз". Соответствующий решению (9) вектор значений целевых функций центров

(10) $\vec{W}\,'' = (W^1_{\max}, H^2(y^1_{\max}), \ldots, H^k(y^1_{\max}))$

доминирует по Парето вектор $\vec{W}\,'$. Выигрыш (в смысле разности сумм значений целевых функций центров) от перехода от треугольной к ромбовидной структуре управления составляет $W^2_{\max}$. Разница между последней величиной и затратами на "содержание" метацентра может рассматриваться как оценка эффективности его управления и, следовательно, как критерий целесообразности введения новой структуры управления.

Таким образом, условием осуществления институционального управления, заключающегося в использовании штрафов или поощрений центров, зависящих от стратегий последних, является наличие у метацентра соответствующих полномочий.

Мотивационное управление. Если институциональное управление основывалось на использовании метацентром стратегий, зависящих от стратегий центров, то мотивационное управление заключается в использовании им стратегий, зависящих от действий агента, то есть изменению целевых функций центров посредством их стимулирования за деятельность управляемого ими агента.

Пусть метацентр заинтересован в максимизации функции $W(y)$ (см. выражение (6)) и использует систему $\{s_i(y)\}_{i \in K}$ стимулирования центров. Целевая функция i-го центра при этом имеет вид:

$$W^i(y) = s_i(y) + H^i(y) - s^i(y),\ i \in K.$$

Затраты метацентра на управление складываются из стимулирования центров и стимулирования непосредственно агента[1] $s_0(y)$, то есть $u_0(y) = \sum_{i \in K} s_i(y) + s_0(y)$.

Таким образом, задача метацентра состоит в минимизации (выбором системы стимулирования) затрат $u_0(y)$ на управление при условии обеспечения реализуемости действия агента, максимизирующего сумму целевых функций центров, равновесными по Нэшу стратегиями центров[2].

<u>Теорема 24.</u> Решение задачи управления в трехуровневой ОС с ромбовидной структурой имеет вид:

$$(11)\quad s_i(y) = \begin{cases} \max\{W^i_{\max} - H^i(y_{\max}); 0\}, & y = y_{\max} \\ 0, & y \neq y_{\max} \end{cases}, \ i \in K,$$

$$(12)\quad s_0(y) = \begin{cases} c(y_{\max}) - \sum_{i \in K} \max\{H^i(y_{\max}) - W^i_{\max}; 0\}, & y = y_{\max} \\ 0, & y \neq y_{\max} \end{cases}.$$

Справедливость утверждения теоремы 24 обосновывается подстановкой (11)-(12) в определение равновесия Нэша игры центров (минимальность платежей очевидна):

$$(13)\quad \sum_{i \in K} l^i = c(y_{max}) - s_0(y_{max}),$$

$$(14)\quad H^i(y_{max}) - W^i_{\max} + s_i(y_{max}) \geq l^i, \ i \in K.$$

Содержательно, метацентр разделяет центры на два множества. В первое множество входят центры, которым невыгодна (с точки зрения условий их индивидуальной рациональности) реализация действия y_{max}. Этим центрам метацентр компенсирует потери в полезности. Во второе множество входят центры, которым выгодна реализация действия y_{max}. Они частично или полностью

---

[1] *Отметим, что в рассматриваемой модели имеет место двойное межуровневое взаимодействие (см. выше), так как агент получает вознаграждения как от центров, так и от метацентра.*

[2] *Эта и подобные задачи являются традиционными задачами, возникающими при управлении холдингами, вертикально интегрированными компаниями и т.д.*

компенсируют затраты агента, а разность доплачивает метацентр в рамках межуровневого взаимодействия.

Пример 5. Пусть в рамках примера 3 возможно введение дополнительного уровня управления - метацентра.

Итак, пусть $k = 2$, $c(y) = y^2$, $H^1(y) = b - a^1 y$, $H^2(y) = a^2\, y$, то есть первый центр заинтересован в выборе агентом минимального (нулевого) действия, а второй центр - некоторого действия, отличного от нуля. Так как интересы центров не согласованы, то имеет место режим конкуренции (см. подробности в примере 3).

Вычислим следующие величины: $y^1_{\max} = 0$, $y^2_{\max} = a^2/2$, $W^1_{\max} = b$, $W^2_{\max} = (a^2)^2/4$, $y_{max} = max\,\{(a^2 - a^1)/2;\, 0\}$, $= b - a^1\,(a^2 - a^1)/2$, $H^2(y_{max}) = a^2\,(a^2 - a^1)/2$.

Пусть для определенности a^2 ³ $2a^1$. Тогда $W^1_{\max}$ ³ $H^1(y_{max})$, $W^2_{\max}$ £ $H^2(y_{max})$. Вычисляя в соответствии с результатом теоремы 24 равновесные платежи, получим:

$$l^1 = 0,\ l^2 = a^2(a^2 - 2a^1)/4,\ s_0(y_{max}) = (a^1)^2/4.$$

Сравним эффективности управления. В режиме конкуренции, когда диктатором является первый центр (а это имеет место при b £ $(a^2)^2/4$), эффективность равна

$$W(\,y^1_{\max}\,) = b - (a^2)^2/4.$$

В трехуровневой ОС эффективность управления (с учетом затрат метацентра на стимулирование) равна

$$W(y_{max}) - s_0(y_{max}) = b - (a^1)^2/4 - (a^2 - a^1)^2/4.$$

Вычисляем разность эффективностей

$$W(y_{max}) - s_0(y_{max}) - W(\,y^1_{\max}\,) = a^1\, a^2 / 2,$$

которая неотрицательна, что позволяет сделать вывод, что достижение режима сотрудничества за счет введения дополнительного уровня управления в рассматриваемой ОС оправданно. •

3.3. Сетевое взаимодействие

Как отмечалось во введении к третьему разделу, под сетевой структурой управления обычно понимается либо иерархическая структура, в которой имеется двойное подчинение, либо такой способ организации взаимодействия участников системы, при котором отсутствует ярко выраженная иерархия, то есть когда все участники ОС априори "равны" и каждый из них в общем случае может вступать в *сетевое взаимодействие* с другими участниками ОС и выступать в нем как в качестве центра, так и в качестве агента.

В разделе 3.2 исследовалась трехуровневая ромбовидная структура управления, являющаяся элементом сетевой иерархической структуры с двойным подчинением. В настоящем разделе исследуются неиерархические сетевые структуры, то есть делается акцент на анализе сетевого взаимодействия.

Так как характерным признаком сетевого взаимодействия является потенциальная возможность каждого из участников ОС выступать в роли центра или агента, или одновременно и в роли центра, и в роли агента (при взаимодействии с различными участниками), то исследуем сначала качественно, а затем на примере ряда последовательно усложняющихся количественных моделей различие между этими "ролями".

Качественное отличие *иерархических игр* от "обычных" неантагонистических игр заключается в наличии упорядочения участников ОС по последовательности выбора стратегий. Обычно считается, что управляющий орган (центр в теории активных систем [23, 61], первый игрок в теории иерархических игр [31], principal в теории контрактов [83, 84, 87]) обладает правом первого хода, то есть выбирает свою стратегию первым и сообщает ее другим участникам системы - управляемым субъектам (активным элементам или агентам в теории активных систем, второму игроку или производителю в теории иерархических игр, agent в теории контрактов).

В зависимости от того, может ли первый игрок рассчитывать на то, что ему станет известна стратегия второго игрока, он может выбирать свою стратегию либо как в "обычной" игре, либо в виде «функции» от выбора второго игрока. Тем самым, первый игрок превращается в *метаигрока*, устанавливающего "правила игры" для остальных игроков (проявление отношения власти [48, 59]). Таким образом, **критерием отнесения конкретного участника ОС ко множеству управляющих органов или ко множеству управляемых субъектов является его приоритет в последовательности**

выбора стратегий и возможность выбирать в качестве своей стратегии «функцию» от стратегий игроков, имеющих более низкий приоритет.

Например, если в некоторой ОС участники принимают решения последовательно и имеются три "момента" принятия решений, то можно условно рассматривать данную ОС как трехуровневую иерархическую систему. Участники, делающие первый ход, при этом интерпретируются как центры верхнего уровня иерархии, участники, делающие второй ход, интерпретируются как центры промежуточного уровня, а участники, выбирающие свои стратегии последними - управляемыми субъектами (агентами). Стратегии центров могут быть функциями от стратегий центров промежуточного уровня и агентов, стратегии центров промежуточного уровня - функциями от стратегий агентов. Следовательно, в рамках теоретико-игровой модели иерархическая структура ОС порождается фиксацией последовательности выбора стратегий и информированности участников.

Таким образом, в процессе сетевого взаимодействия каждый из участников в общем случае может выступать как в роли центра того или иного уровня иерархии, так и в роли агента. Фактическая роль участника определяется двумя факторами. Первый фактор заключается во влиянии имеющегося отношения власти, то есть институциональной возможности определенного участника выступать в той или иной роли. Второй фактор заключается в целесообразности (эффективности, в том числе и экономической) этой роли как с точки зрения самого участника, так и с точки зрения других участников.

Фиксируем экзогенно заданное отношение власти и рассмотрим эффективность различных распределений ролей между участниками ОС. Другими словами, исследуем следующую модель. Имеются несколько игроков (участников ОС), каждый из которых может выбирать свои стратегии в определенные моменты времени и в зависимости от принятой последовательности выбора стратегий делать свою стратегию зависящей от стратегий участников, выбирающих стратегии после него. Получаем *метаигру*[1] - игру, в кото-

---

[1] *В [31] метаиграми названы игры с фиксированной последовательностью ходов, в которых стратегии одних игроков могут быть "функциями" от стратегий других игроков.*

рой определяются роли участников (будем считать, что их выигрыши при каждом фиксированном распределении ролей могут быть вычислены). Следовательно необходимо описать и исследовать равновесия в этой метаигре, чем мы и будем заниматься в оставшейся части настоящего раздела для нескольких содержательно интерпретируемых задач.

Первым и достаточно ярким примером является задача стимулирования (см. также [30, 31, 46, 62]).

<u>Пример 6.</u> Пусть ОС состоит из двух участников - "центра" и "агента"[1], имеющих целевые функции

(1) $W(z, y) = H(y) - z$,

(2) $w(z, y) = z - c(y)$

соответственно (см. раздел 2.1). Стратегией центра в задаче стимулирования (являющейся игрой типа Γ_2 с побочными платежами и специфическим видом целевых функций) является выбор положительнозначных функций от стратегий агента, стратегией агента - выбор неотрицательных действий.

Пусть выполнено предположение А.2 и гипотеза благожелательности. Рассмотрим последовательно несколько возможных игр между центром и агентом.

Игра Γ_0. Рассмотрим "обычную" некооперативную игру, в которой центр и агент выбирают свои стратегии одновременно и независимо. Обозначим эту игру Γ_0. Так как центр не имеет возможности наблюдать реализацию выбора агента, то он вынужден ограничиться выбором неотрицательного числа (а не функции от действия агента, как это имеет место в случае, когда центр делает первый ход и рассчитывает на знание действия агента).

Из выражений (1) и (2) следует, что в игре Γ_0 равновесиями Нэша агента и центра является выбор нулевых значений действий и вознаграждений соответственно. Таким образом, равновесные стратегии[2]: $z_0 = 0, y_0 = 0$, а выигрыши участников: $W_0 = 0, w_0 = 0$.

---

[1] *Так как мы будем рассматривать всевозможные последовательности ходов и варианты информированности, то термины "центр" и агент" введены для идентификации участника ОС по виду его целевой функции (см. выражения (1) и (2)).*

[2] *Условимся, что нижний индекс соответствует номеру рассматриваемой игры.*

Игра Γ_1. Предположим теперь, что центр обладает правом первого хода, но не может рассчитывать на знание выбора агента. Поэтому он вынужден, как и в игре Γ_0, ограничиться выбором неотрицательного числа. Отличие игры Γ_1 от игры Γ_0 заключается в том, что в ней центр выбирает свою стратегию первым и сообщает ее агенту, а агент выбирает свое действие при известной ему стратегии центра.

Легко видеть, что наличие права первого хода у центра не меняет исхода: при любой стратегии центра агент выбирает нулевое действие как действие, минимизирующее затраты. Поэтому оптимальной стратегией центра будет нулевое поощрение. Итак:

$$z_1 = 0,\ y_1 = 0,\ W_1 = 0,\ w_1 = 0.$$

Игра Γ_2^*. Если изменить имеющую место в игре Γ_1 последовательность выбора стратегий на противоположную, то получим игру[1] Γ_2^*, в которой агент первым выбирает стратегию и сообщает ее центру (при этом считается, что стратегия центра всегда становится известной агенту; в противном случае получим игру Γ_1^*, решение которой для рассматриваемого примера совпадает с решением игры Γ_1). Содержательно центр получает от агента информацию о зависимости действия, выбираемого агентом, от вознаграждения, выплачиваемого ему центром.

Обозначим

(3) $y^* = arg \max\limits_{y \in A} \{H(y) - c(y)\}$,

(4) $Q = H(y^*) - c(y^*)$.

Оптимальной стратегией агента будет стратегия

(5) $\tilde{y}_2(z) = \begin{cases} y^*, & z = H(y^*) \\ 0, & z \neq H(y^*) \end{cases}$,

побуждающая центр выбрать поощрение $z = H(y^*)$ и приводящая к следующему вектору полезностей:

$$W_2^* = 0,\ w_2^* = Q.$$

[1] *В соответствии с обозначениями теории иерархических игр [31] игра, полученная из исходной переменой последовательности ходов, обозначается звездочкой.*

Игра Γ_2, в которой центр делает первый ход и, рассчитывая на знание стратегии агента, выбирает свою стратегию в виде функции от выбора агента, подробно исследовалась выше (см. раздел 2.1).

В этой игре оптимальны стратегии

(6) $z_2 = \tilde{z}_2(y) = \begin{cases} c(y^*), & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases}; y_2 = y^*,$

которые приводят к следующему вектору выигрышей:

$$W_2 = Q,\ w_2 = 0.$$

Игра Γ_3^*. Если в игре Γ_2 первый ход делает агент, то получаем игру Γ_3^*. Оптимальные стратегии агента и центра:

(7) $\tilde{y}_3^*(\tilde{z}(y)) = \begin{cases} y^*, & z = \tilde{z}_3(y) = \begin{cases} H(y^*), & y = y^* \\ 0, & y \neq y^* \end{cases} \\ 0, & z \neq \tilde{z}_3(y) \end{cases}; z_3^* = \tilde{z}_3(y),$

приносят им выигрыши

$$W_3^* = 0,\ w_3^* = Q.$$

Игра Γ_3, в которой стратегией агента является функция от выбора центра, для рассматриваемого примера эквивалентна (в смысле равновесных выигрышей участников системы) игре Γ_2, то есть

$$W_3 = Q,\ w_3 = 0.$$

Рассматривать игры более высокого порядка не имеет смысла[1].

Сводка результатов анализа различных игр[2] для задачи стимулирования приведена в таблице 2. Второй и третий столбцы содер-

---

[1] *Действительно, в [31] показано, что все нечетные игры, начиная с третьей эквивалентны (в смысле гарантированного выигрыша первого игрока) игре Γ_3, а все четные игры, начиная со второй, эквивалентны игре Γ_2. Среди первых трех игр игра Γ_2 характеризуется максимальной эффективностью, далее следует игра Γ_3, и, наконец, игра Γ_1.*

[2] *Из рассматриваемой схемы "выпадает" распределение ролей, когда оба игрока являются центрами и каждый пытается навязать другому игру Γ_2 с правом собственного первого хода. Определить равновесие в такой игре, не вводя дополнительных предположений, затруднительно. Можно считать равновесием ситуацию, в которой один из игроков соглашается*

жат равновесные выигрыши центра и агента в игре, соответствующей строке.

Игра	W	w
Γ_0	0	0
Γ_1^*	0	0
Γ_1	0	0
Γ_2^*	0	Q
Γ_2	Q	0
Γ_3^*	0	Q
Γ_3	Q	0

Таблица 2. Равновесные выигрыши центра и агента в задаче стимулирования

Таким образом, минимальными играми, описывающие все разнообразие равновесных распределений выигрышей, являются игры Γ_2 и Γ_2^* (в играх Γ_0, Γ_1^* и Γ_1 выигрыши участников строго доминируются по Парето выигрышами в любой из игр второго порядка[1], а игры третьего и более высокого порядка приводят к тем же векторам выигрышей).

Можно также заметить, что в играх второго порядка участники ОС, фактически, определяют распределение между собой неделимого выигрыша Q – игрок, сделавший ход первым, забирает этот выигрыш себе, вынуждая второго согласиться (в рамках гипотезы благожелательности) на нулевое значение (см. также описание задач найма на работу - так называемые модели рекрутинга [47] и результаты исследования *области компромисса* в трудовых контрактах [46]). Напомним, что областью компромисса называется множество дележей z между центром и агентом, сумма которых

на второй ход. При этом реализуется одна из описанных выше игр Γ_2 или Γ_2^*.

[1] *Индекс i игры Γ_i иногда называется степенью игры или показателем рефлексии.*

равна Q, при использовании участниками стратегий (5) или (7), то есть следующее множество:

(8) $\{z \geq 0 \mid W(z, y^*) + w(z, y^*) = Q\}$.

Следовательно, при определении ролей в задаче стимулирования происходит борьба участников за первый ход. Если существуют институциональные ограничения, определяющие последовательность ходов, то роли распределяются однозначно. Такая ситуация может иметь место, например, при найме агента на работу в организацию, интересы которой представляет центр. Если на рынке труда существует значительная конкуренция (то есть, если имеется несколько претендентов на данную вакансию), то равновесием среди претендентов является аукционное решение (в случае, когда имеется много однородных агентов, в равновесии агент получает нулевую (или резервную в рамках моделей теории контрактов [20, 46, 86]) полезность). Если же на рынке имеется единственный претендент (например, высококвалифицированный специалист и т.д.), то он является "диктатором" и может сделать первый ход, вынудив центр согласиться на нулевую полезность.

Отметим, что вектора полезностей участников ОС, соответствующие играм Γ_2 и Γ_2^*, недоминируемы по Парето (что следует из выражения (8)). Поэтому, пожалуй, единственной альтернативой в этом случае является использование арбитражных схем (введение третьей стороны - арбитра, определяющего роли участников и/или дележи внутри области компромисса (8)), которые позволяют в рамках существующих институциональных ограничений однозначно определить распределение ролей и, следовательно, полезностей. В качестве арбитра в многоуровневой ОС может выступать управляющий орган, принадлежащий более высокому уровню иерархии (см. также обсуждение системообразующей роли стимулирования в [59]).

Помимо трудовых контрактов, содержательным примером распределения ролей в соответствии с описанной выше схемой могут служить механизмы обмена. Пусть, например, пассажир хочет поймать такси, чтобы доехать до определенного места. Он готов заплатить за это сумму a, а таксист готов ехать за вознаграждение b. Очевидно, что, если $b > a$, то область компромисса пуста. Взаимодействие возможно и взаимовыгодно (по сравнению с сохранением статус-кво) только если $a \geq b$. При этом разность $Q = a - b$

определяет "размер" области компромисса. Если величины a и b известны обоим игрокам[1], то, если первым предложение делает пассажир, то он называет цену таксиста и "экономит" Q, если же первым предложение делает таксист, то он называет цену пассажира и "выигрывает" ту же величину Q. •

Другой показательный пример распределения ролей участников ОС дает сравнение игр Γ_0 и Γ_1.

Пример 7. Пусть имеются n агентов с целевыми функциями $f_i(y)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in A = \prod_{i \in I} A_i$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть E_N - множество равновесий Нэша, то есть

(9) $E_N = \{y^N \in A \mid \forall\ i \in I,\ \forall\ y_i \in A_i\ f_i(y_i^N,\ y_{-i}^N) \geq f_i(y_i,\ y_{-i}^N)\}$,

где $y_{-i} = (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ - обстановка игры для i-го игрока, $i \in I$.

Предположим, что существует соответствие отбора равновесий [21, 61, 79], отображающее множество равновесий Нэша во множество A, то есть ставящее в соответствие множеству равновесий конкретное равновесие. Обозначим это конкретное равновесие y^N.

При определении равновесия Нэша предполагается, что игроки выбирают свои стратегии одновременно и независимо. Рассмотрим как повлияет на множество равновесий предположение о том, что некоторые игроки обладают правом первого хода.

Если в исходной игре существует равновесие в доминантных стратегиях (РДС), то есть у каждого игрока существует абсолютно оптимальная (не зависящая от стратегий других игроков) стратегия [23, 61, 86], то итоговое равновесие, очевидно, не будет зависеть от последовательности ходов. Поэтому рассмотрим случай, когда РДС не существует, но существует равновесие Нэша.

Фиксируем произвольное множество $S \subseteq I$. Пусть $y_S \in A_S = \prod_{i \in S} A_i$ - произвольный вектор равновесных по Нэшу стратегий игроков из множества S, то есть:

---

[1] *Более сложные и реалистичные модели механизмов обмена, учитывающие неполную информированность сторон о предпочтениях и возможностях друг друга, рассмотрены в [83, 84].*

(10) y_S: $\exists\, y_{I\backslash S} \in A_{I\backslash S} = \prod_{i \in I \backslash S} A_i : (y_S; y_{I\backslash S}) \in E_N$;

(11) $E_N(S) = \{y_S \in A_S \mid \exists\, y_{I\backslash S} \in A_{I\backslash S}: (y_S; y_{I\backslash S}) \in E_N\}$

 - множество равновесных по Нэшу стратегий игроков из множества S.

Обозначим $E_N(y_S)$ - множество равновесий Нэша, определяемых равновесными по Нэшу стратегиями игроков из множества $I\backslash S$ при условии, что игроки из множества S выбрали вектор стратегий $y_S \in A_S$, удовлетворяющий (10), то есть

(12) $E_N(y_S) = \{y \in A \mid y = (y_S;\ y^N_{I\backslash S}):\ \forall\ i \in I\backslash S,\ \forall\ y_i \in A_i$

$$f_i(y_S,\ y_i^N,\ y^N_{I\backslash(S\cup\{i\})}) \geq f_i(y_S, y_i,\ y^N_{I\backslash(S\cup\{i\})}).$$

<u>Лемма 25.</u> $\forall\ S \subseteq I,\ \forall\ y_S \in E_N(S)\ \ E_N(y_S) \subseteq E_N$.

Справедливость утверждения леммы 25 следует из того, что, если существует множество игроков $S \subseteq I$ и существуют вектор y_S, удовлетворяющий (11), и вектор $y_{I\backslash S}$, удовлетворяющий (12), то в силу (10) вектор $(y_S; y_{I\backslash S})$ должен принадлежать (9).

Содержательно лемма 25 гласит, что, если некоторое множество агентов имеет право первоочередного хода, то, сообщая соответствующие компоненты равновесных по Нэшу стратегий, они могут только сузить множество итоговых равновесий Нэша. Другими словами, при фиксации части равновесных стратегий множество равновесных стратегий других игроков не расширяется.

Следовательно, если исходное множество равновесий содержит более одного элемента, и различным его элементам соответствуют различные компоненты стратегий игроков из некоторого множества, то игроки из этого множества, выбирая свои стратегии первыми, могут сузить множество итоговых равновесий, то есть побудить остальных игроков к выбору определенных равновесных стратегий.

В качестве иллюстрации рассмотрим модель ОС, описанную в примере 5 работы [63].

Рассмотрим ОС с двумя агентами, имеющими функции затрат $c_i(y_i) = y_i^2 / 2r_i$, $i = 1, 2$. Пусть центр использует систему стимулирования

$$s_i(y_1, y_2) = \begin{cases} C_i, \ y_1 + y_2 \geq x \\ 0, \ \ y_1 + y_2 < x \end{cases}, \ i = 1, 2.$$

Содержательно центр выплачивает каждому агенту фиксированное вознаграждение при условии, что сумма их действий оказывается не меньше, чем некоторое плановое значение x. Обозначим Y – множество индивидуально-рациональных действий АЭ:

$y_i^+ = \sqrt{2r_iC_i}$, $i = 1, 2$, $Y = \{(y_1, y_2) \mid y_i$ £ y_i^+, $i = 1, 2, y_1 + y_2$ £ $x\}$.

Рассмотрим следующую комбинацию переменных (см. рисунок 11). Пусть множество равновесий Нэша состоит из точки $(0; 0)$ и отрезка $[N_1\ N_2]$, то есть

$E_N(s) = (0; 0)$ È $[N_1; N_2]$,

причем точки интервала $(N_1; N_2)$ являются недоминируемыми по Парето другими равновесиями, то есть:

$(N_1; N_2) = Par\ (E_N(s), \{f_i\})$.

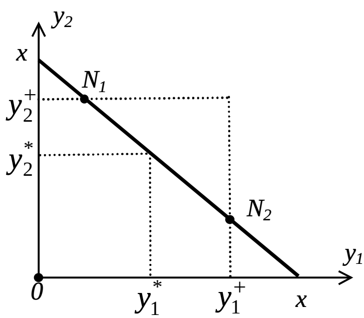

Рис. 11

Первому агенту выгодно равновесие N_1, второму - N_2. Делая ход первым, первый агент может выбрать действие (x - y_2^+), вынуждая второго агента выбрать в силу ГБ действие y_2^+. Аналогично, второй агент, делая ход первым, может выбрать действие (x - y_1^+), вынуждая первого агента выбрать действие y_1^+.

Закончив рассмотрение иллюстративного примера, обсудим в каких случаях реализация права первого хода некоторым множеством игроков S выгодна для всех игроков.

Очевидно, что, если все элементы множества E_N эффективны по Парето, то всегда найдется игрок, для которого изменение равновесия невыгодно (см. приведенный выше пример с двумя игроками). Так как "цена вопроса" для игроков из множества S определяется разностью между их выигрышами при текущем равновесии и максимумом выигрышей, которые они могут получить, изменяя равновесие внутри множества E_N за счет приоритета в моменте выбора стратегии, то возможно использование побочных платежей от игроков из множества S игрокам из множества $I \backslash S$, компенсирующих последним потери в полезности. При этом игроки из множества S могут интерпретироваться как центры.

Альтернативой является введение дополнительного управляющего органа, устанавливающего побочные платежи, которые побуждают участников выбрать определенное равновесие Нэша (см. модели и примеры в [63]).

И, наконец, в заключение отметим, что в лемме 25 рассматривается случай первоочередного выбора игроками из множества S соответствующих компонентов именно равновесных стратегий. В общем случаи они могут выбирать стратегии не из множества $E_N(S)$, побуждая тем самым остальных игроков выбирать равновесные в их собственной игре стратегии, что может оказаться более выгодным для первых (см. в качестве иллюстрации анализ игры Γ_1 в примере 9). Другими словами, в игре Γ_1 первоочередной выбор некоторыми игроками "неравновесных" (в соответствующей игре Γ_0) стратегий может оказаться более выгодным, чем выбор компонент некоторого равновесия. •

Пример 8. Пусть ОС включает двух участников, целевые функции которых имеют вид:

$$f_i = y_i + a_i\,(1 - y_{-i}),\ y_i \in A_i = [0;\ 1],\ i = 1, 2.$$

В данной ОС в игре Γ_0 имеется равновесие в доминантных стратегиях (РДС), в котором оба участника выбирают стратегии тождественно равные единице и получают единичные выигрыши. Равновесие и выигрыши в игре Γ_1 такие же.

Рассмотрим игру Γ_2. Пусть i-ый игрок использует стратегию

$$(13)\quad \tilde{y}_i(y_{-i}) = \begin{cases} 0, & y_{-i} = 0 \\ 1, & y_{-i} \neq 0 \end{cases},\ i = 1, 2.$$

При этом в случае, когда $a_{-i} \geq 1$ игрок $-i$ выбирает нулевую стратегию, а при $a_{-i} \leq 1$ - единичную. Игроку i это выгодно при $a_i \geq 1$.

Следовательно, игра Γ_2 (без побочных платежей) выгодна обоим игрокам при выполнении условия

(14) a_i ³ 1, $i = 1, 2$.

В этой игре они получают выигрыши $\{a_i\}$. Если условие (14) не выполнено, и побочные платежи запрещены, то каждый из игроков будет использовать доминантную стратегию, гарантирующую единичный выигрыш.

Содержательно условие a_i ³ 1 означает, что "вклад" партнера в целевую функцию i-го участника ОС не меньше, чем его собственный вклад.

Таким образом, если выполнено условие (14), то обоим игрокам одинаково выгодно, чтобы кто-либо из них или они оба были бы центрами.

Рассмотрим теперь что произойдет, если допустить возможность осуществления побочных платежей (см. общие результаты об эффективности использования побочных платежей в [30, 31], а также в разделе 2.1), при которых целевые функции игроков имеют вид (если i-ый игрок является центром)

$$f_i = y_i + a_i (1 - y_{-i}) - z_i,\ f_{-i} = y_{-i} + a_{-i} (1 - y_i) + z_i,\ i = 1, 2.$$

Пусть первый игрок использует следующий платеж

(15) $z_i = \begin{cases} s_i, & y_{-i} = 0 \\ 0, & y_{-i} \neq 0 \end{cases}.$

Игрок $-i$ выберет нулевое действие при s_i ³ 1. Следовательно, использование стратегии (15) выгодно i-му игроку, если a_i ³ 1. Область компромисса при этом есть $Q_i = a_i - 1$. Таким образом, при выполнении условия

(16) $max\ \{a_i, a_{-i}\}$ ³ 1,

которое является более слабым, чем условие (14), хотя бы одному игроку выгодно быть центром и получить выигрыш a_i. Игрок, не являющийся центром, получает единичный выигрыш.

Если выполнено условие (14) и разрешены побочные платежи, то возможна ситуация, в которой обоим игрокам выгодно быть центром. При этом они начнут конкурировать за право быть центром. Победителем в этой конкуренции (диктатором) станет игрок, имеющий большее значение параметра a_i. Легко видеть, что конкуренция невыгодна диктатору, поэтому в случае (14) использование побочных платежей нецелесообразно.

Игра		f_i	f_{-i}
Γ_0, Γ_1		1	1
Γ_2 с побочными платежами	$a_i \geq 1,\ a_{-i} \leq 1$	a_i	1
	$a_i \leq 1,\ a_{-i} \geq 1$	1	a_{-i}
Γ_2 без побочных платежей ($a_i \geq 1,\ i = 1, 2$)		a_i	a_{-i}

Таблица 3. Выигрыши игроков в различных играх в примере 8.

Следовательно, можно сказать, что, если не выполнено условие (16), то оба игрока будут "агентами", реализующими игру Γ_0; если выполнено (16), но не выполнено (14), то "центром", реализующим игру Γ_2 с побочными платежами, будет игрок с максимальным значением параметра a_i; если выполнено условие (14), то оба игрока (или любой из них) будут "центрами", реализующими игру Γ_2 без побочных платежей (см. таблицу 3). •

Если в примерах 6-8 в процессе сетевого взаимодействия образовывались двухуровневые ОС (шло разделение участников на "центры" и "агенты"), то в рассматриваемом ниже примере возникает уже трехуровневая структура.

Пример 9. Рассмотрим ОС, состоящую из четырех участников, имеющих целевые функции

$$f_i(y) = y_i - \frac{y_i^2}{2(\sum\limits_{j \neq i} y_j - 4r_i)},\ r_i > 0,\ y_i \in A_i = [0; +\infty),\ i = \overline{1, 4}.$$

Содержательно $f_i(y)$ - прибыль i-го участника ОС, зависящая от его действия, причем эффективность его деятельности (знаменатель второго слагаемого) зависит от действий других участников.

Игра Γ_0. Вычислим конечное равновесие Нэша и равновесные выигрыши:

(17) $y_{0_i}^N = \sum\limits_{j \neq i} r_j - r_i,\ f_i(y^N) = y_{0_i}^N/2.$

Игра Γ_1. Предположим, что i-ый игрок обладает правом первого хода, но не узнает выборов других игроков, то есть реализуется игра Γ_1. Пусть i-ый игрок выбрал стратегию $\hat{y}_i \in A_i$ и сообщил ее другим игрокам. Тогда три игрока ищут равновесие Нэша в игре с целевыми функциями: $f_j(y) = y_j - \dfrac{y_j^2}{2(\hat{y}_i + \sum_{k \neq i, j} y_k - 4r_j)}$, $j \neq i$.

Это равновесие есть: $y_{1_j}^N = 2 \sum_{k \neq i, j} r_k - \hat{y}_i$, $j \neq i$. Равновесные выигрыши: $f_{1_j}^N = y_{1_j}^N / 2$, $j \neq i$.

Целевая функция i-го игрока может быть записана в виде

$$f_{1_i}^N(\hat{y}_i) = \hat{y}_i - \frac{\hat{y}_i^2}{2(4y_{0_i}^N - 3\hat{y}_i)}.$$

Максимум этого выражения, равный $f_{1_i}^{N*} \approx 0.6\ y_{0_i}^N$, достигается при $\hat{y}_{1_i}^* \approx 0.83\ y_{0_i}^N$. Выигрыши других игроков равны:

(18) $f_{1_j}^N \approx 1/2\,[1.17 \sum_{k \neq i, j} r_k - 0.83\,(r_j - r_i)]$, $j \neq i$.

Так как $f_{1_i}^{N*} > f_i(y^N)$, $i \in I$, то любому из игроков (поодиночке) выгодно разыгрывать игру Γ_1, делая первый ход. Более того, если $\sum_{j \neq i} r_j - r_i \geq 0$, то выделение i-го игрока в качестве центра выгодно всем участникам ОС (для обоснования этого утверждения достаточно сравнить выражения (17) и (18)).

Отметим, что в лемме 25 утверждалось, что выбор одним из игроков равновесной стратегии до выбора других игроков не ухудшает его выигрыша. В настоящем примере оказывается (так как равновесие Нэша в игре всех четыре участников ОС единственно), что выбор им неравновесной стратегии строго увеличивает его выигрыш в игре Γ_1 по сравнением с игрой Γ_0.

Таким образом, выделение, например, первого игрока (см. рисунки 12а и 12б в качестве центра может оказаться эффективно по Парето с точки зрения всех участников ОС. Замечая, что целевая функция каждого из участников зависит только от суммы стратегий других участников, можно анализировать эффективность более сложных структур. Например, на рисунке 12в изображена структура трехуровневой ОС, в которой первый игрок (находящийся на верхнем уровне иерархии) разыгрывает игру $Г_1$ (см. выше), второй игрок (находящийся на втором уровне иерархии) при заданной сумме действий второго, третьего и четвертого игроков разыгрывает игру $Г_2$ с третьим и четвертым игроками, находящимися на нижнем уровне иерархии, осуществляя им побочные платежи за выбор соответствующих стратегий и т.д. •

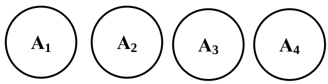

Рис. 12а

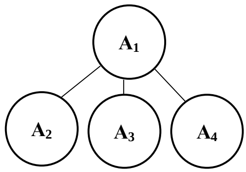

Рис. 12б

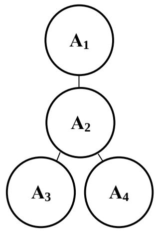

Рис. 12в

Проведенное рассмотрение ряда примеров сетевого взаимодействия участников ОС позволяет сделать вывод, что задача определения "ролей" участников ОС при заданных институциональных ограничениях является *задачей синтеза оптимальной структуры ОС*. Изучение метаигр, описывающих "игры" участников при определении их "ролей", представляется перспективным и актуальным направлением будущих исследований в теории управления социально-экономическими системами.

Таким образом, приведенные в третьем разделе результаты рассмотрения сетевых структур управления (межуровневого взаимодействия, ромбовидных структур и, в первую очередь, сетевого взаимодействия) позволяют сделать следующий общий качественный вывод: **одной из причин разделения функций управления (возникновения иерархий, распределения полномочий принятия решений и т.д.) в сложных организационных системах является необходимость и возможность повышения (как с точки зрения системы в целом, так и с точки зрения каждого из ее участников!) эффективности их взаимодействия за счет снижения неопределенности относительно поведения друг друга**. Примерами такого снижения неопределенности являются:

отбор равновесий в режиме сотрудничества, исключение неэффективных равновесий в режиме конкуренции и при сетевом взаимодействии, перераспределение "ролей" в процессе сетевого взаимодействия и др.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках единой постановки задачи управления и введенной системы классификаций (см. первый раздел) представлены результаты систематического рассмотрения теоретико-игровых моделей механизмов функционирования организационных систем с распределенным контролем.

Результаты исследования этого класса моделей (см. второй раздел) позволяют сделать вывод, что характерной чертой ОС РК является наличие игры центров и векторных предпочтений агентов. Ключевую роль при анализе базовых моделей ОС РК играют два принципа – *принцип декомпозиции игры центров* и *принцип компенсации затрат*.

Принцип компенсации затрат, заключающийся в том, что минимальная система стимулирования, реализующая в рамках гипотезы благожелательности любое действие агента, должна компенсировать его затраты, справедлив и для ОС УК, и для ОС РК с векторными предпочтениями агентов, и использует метод анализа минимальных затрат на стимулирование, что позволяет обеспечить единственность Парето оптимального действия агента.

Принцип декомпозиции игры центров специфичен для ОС РК, в которых имеет место двойное подчинение агентов, и заключается в существовании двух режимов взаимодействия центров в зависимости от степени согласованности их интересов - режима сотрудничества (кооперация центров) и режима конкуренции (аукционное решение).

Предложенный подход и полученные в его рамках общие результаты позволили решить ряд задач анализа эффективности различных структур управления многоуровневыми организационными системами (см. третий раздел), а также сделать следующий общий качественный вывод: одной из причин разделения функций управления в сложных организационных системах является необходимость и возможность повышения (как с точки зрения системы в целом, так и с точки зрения каждого из ее участников!) эффективности их взаимодействия за счет распределения "ролей" и снижения неопределенности относительно поведения друг друга.

В качестве перспективных направлений исследований следует, в первую очередь, указать целесообразность систематического изучения кооперативного взаимодействия центров в организационных системах с распределенным контролем, а также задач синтеза оптимальной структуры системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев В.П., Бурков В.Н., Еналеев А.К. Многоканальные активные системы // А и Т. 1990. N 11. С. 106 - 116.

2. Андреев С.П., Бурков В.Н., Динова Н.И., Кондратьев В.В., Цветков А.В., Черкашин А.М. Механизмы функционирования организационных систем. Обследование, описание и моделирование. М.: ИПУ, 1983.

3. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: наука, 1990. – 236 с.

4. Алиев В.С., Кононенко А.Ф. Об условиях точного агрегирования в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1991. – 28 с.

5. Алиев В.С., Цветков А.В. Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1985. С. 35-42.

6. Ануфриев И.К., Бурков В.Н., Вилкова Н.И., Рапацкая С.Т. Модели и механизмы внутрифирменного управления. М.: ИПУ РАН, 1994. - 72 с.

7. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» модели / Математическое моделирование социальных процессов. М.: МГУ, 1998. С. 29 - 51.

8. Арсланов М.З. Бинарные отношения в теории активных систем // Автоматика и Телемеханика. 1998. № 1.

9. Арсланов М.З. Скаляризация задачи построения множества оптимальных по Слейтеру решений // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 8.

10. Ашимов А.А., Бурков В.Н., Джапаров Б.А., Кондратьев В.В. Согласованное управление активными производственными системами. М.: Наука, 1986. - 248 с.

11. Баркалов С.А., Бурков В.Н., Гилязов Н.М. Методы агрегирования в управлении проектами. М.: ИПУ РАН, 1999. – 55 с.

12. Березовский Б.А., Барышников Р.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М. Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука. - 128 с.

13. Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. - 255 с.

14. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси: Мецниереба, 1974. - 234 с.

15. Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С. Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: ИПУ РАН, 1997. - 59 с.

16. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. - 245 с.

17. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. I. Необходимые и достаточные условия оптимальности правильных механизмов функционирования в случае полной информированности центра // Автоматика и Телемеханика. 1983. № 10. С. 139 - 144.
18. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. II. Синтез оптимальных правильных механизмов функционирования в случае полной информированности центра // Автоматика и Телемеханика. 1984. № 11.
19. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В., Цветков А.В. Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. III. Некоторые задачи оптимального согласованного планирования в случае неполной информированности центра // Автоматика и Телемеханика. 1984. № 12.
20. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 - 30.
21. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.
22. Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994. - 270 с.
23. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981. - 384 с.
24. Бурков В.Н., Кондратьев В.В., Цыганов В.В., Черкашин А.М. Теория активных систем и совершенствование хозяйственного механизма. М.: Наука, 1984. - 272 с.
25. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997. - 188 с.
26. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999. – 128 с.
27. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990. - 256 с.
28. Волкович В.Л., Михалевич В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М.: Наука, 1982. – 286 с.
29. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. - 384 с.

30. Гермейер Ю.Б., Ерешко Ф.И. Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1974. № 14. С. 1437 - 1450.
31. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 327 с.
32. Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н. О прикладных задачах теории иерархических систем управления / Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 30 – 43.
33. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ДАН СССР. 1971. Е. 198. № 5. С. 1001 - 1004.
34. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. - 144 с.
35. Данилов В.И., Сотсков А.И. Механизмы группового выбора. М.: Наука, 1991. – 176 с.
36. Дружинин В.В., Конторов Д.С. Проблемы системологии. М.: Сов. радио, 1976. - 295 с.
37. Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. - 606 с.
38. Караваев А.П., Новиков Д.А., Федченко К.А. Управление риском в активных системах с распределенным контролем / "Проблемы управления безопасностью сложных систем". Труды международной конференции. М.: ИПУ РАН, 1999.
39. Караваев А.П., Федченко К.А. Классификация задач управления активными системами с распределенным контролем / Труды конференции МФТИ. Долгопрудный, 1999.
40. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. - 838 с.
41. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
42. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. - 238 с.
43. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979. - 504 с.
44. Кондратьев В.В., Тихонов А.А., Цветков А.В. Частично согласованное планирование в условиях неполной информированности центра / Материалы Всесоюзного семинара "Управление большими системами". Алма-Ата: КазПТИ, 1983. - С. 18-19.
45. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.

46. Кочиева Т.Б., Новиков Д.А. Базовые системы стимулирования. М.: Апостроф, 2000. - 108 с.
47. Кочиева Т.Б., Новиков Д.А., Титов А.С. Теоретико-игровые модели стимулирования в задачах рекрутинга / Тезисы докладов XLI научной конференции МФТИ. Часть II. МФТИ: Долгопрудный, 1998. - С. 38.
48. Менар К. Экономика организаций. М.: ИНФРА-М, 1996. - 160 с.
49. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем. М.: Мир, 1973. - 344 с.
50. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. – 256 с.
51. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. – 488 с.
52. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987. – 280 с.
53. Морозов А.И., Палюлис Н.К., Цветков А.В. Анализ системы стимулирования тематического подразделения / Неопределенность, риск, динамика в организационных системах. М.: ИПУ РАН, 1984. С. 14-23.
54. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. - 464 с.
55. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. – 208 с.
56. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. - 707 с.
57. Новиков Д.А. Механизмы гибкого планирования в активных системах с неопределенностью // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
58. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
59. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999. - 150 с.
60. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998. - 68 с.
61. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999. – 108 с.
62. Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998. - 216 с.
63. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: ИПУ РАН, 2000.
64. Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа, 1986. – 384 с.

65. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. - 248 с.
66. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях М.: Наука, 1979. - 218 с.
67. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. - 206 с.
68. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. - 230 с.
69. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.- 304 с.
70. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
71. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. М.: Синтег, 1998. - 376 с.
72. Федченко К.А.. Модели управления активными системами с распределенным контролем и векторными предпочтениями активных элементов/ Тезисы докладов XLI конференции МФТИ. Долгопрудный, 1998. Часть 2.
73. Федченко К.А.. Механизмы управления активными системами с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 1998 (на правах рукописи).
74. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.- 352 с.
75. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело, 1993. – 864 с.
76. Цыганов В.В. Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. М.: Наука, 1991. - 166 с.
77. Barnard C.J. The functions of the executive. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1968. - 334 p.
78. Coombs C.H., Dawes .M., Tversky A. Mathematical psychology. N.Y.: Englewood Cliffs, 1970. - 419 p.
79. Dasgupta P., Hammond P., Maskin E. The implementation of social choice rules: some general results on incentive compatibility // Review of Economic Studies. 1979. Vol. 46. № 2. P. 185 - 216.
80. Drucker P. People and performance. London: Heinemann, 1977.- 366 p.
81. Handy C. Understanding organizations. London: Pengium Books, 1993. - 445 p.
82. Hurwicz L. On informationally decentralized systems / Decision and organization. Amsterdam: North-Holland Press, 1972. P. 297 - 336.
83. Laffont J.J. Fundamentals of public economics. Cambridge: MIT Press, 1989. – 289 p.
84. Laffont J.J. The economics of uncertainty and information. Cambridge: MIT Press, 1989. – 289 p.

85. Marchak J., Radner R. Economic theory of teams. New Haven - London: Yale Univ. Press, 1976. - 345 p.
86. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991. - 568 p.
87. Myerson R.B. Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent problems // Journal of Mathematical Economy. 1982. Vol. 10. № 1. P. 67 - 81.